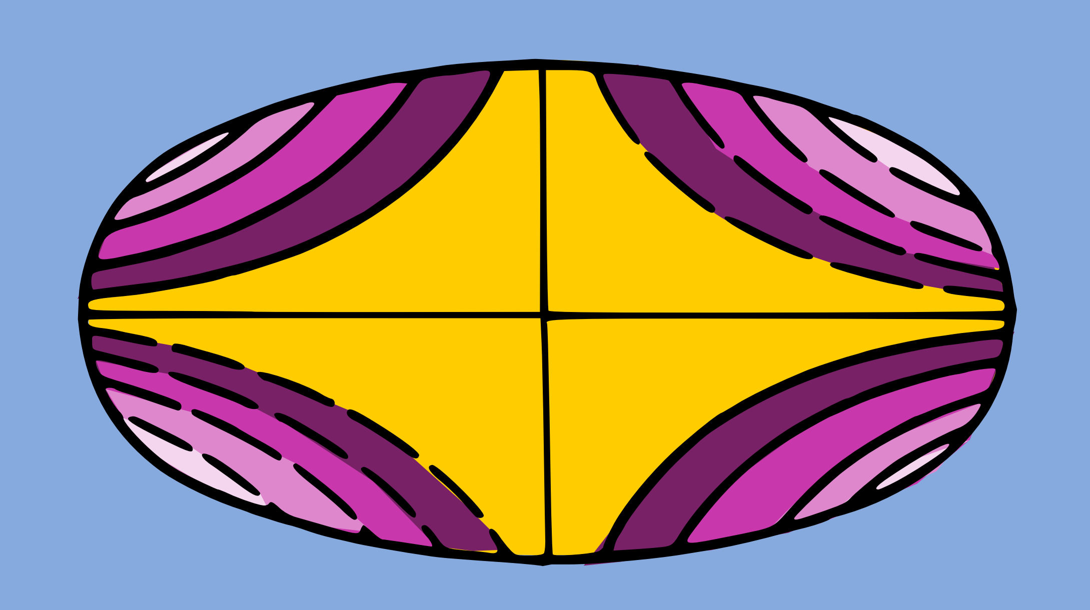
V. Rekatch

THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ
Manuel de résolution des problèmes



Éditions Mir Moscou

В. РЕКАЧ

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА»

V. RÉKATCH

THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ

Manuel de résolution des problèmes

ÉDITIONS MIR · MOSCOU

Traduit du russe
par O. PARTCHEVSKI

На французском языке

PRÉFACE

La complexité des problèmes de la théorie de l'élasticité ainsi que la diversité des méthodes de résolution de ces problèmes oblige les étudiants se spécialisant dans cette discipline de puiser l'information à des sources nombreuses: monographies, manuels et articles de revues scientifiques.

Dans le présent manuel l'auteur s'est efforcé à rassembler au même endroit tous les matériaux fondamentaux qui permettent d'utiliser pratiquement les équations de la théorie de l'élasticité.

Ce manuel embrasse toutes les *branches* de la théorie mathématique de l'élasticité.

On y a inclu les équations théoriques et les formules avec des brèves explications nécessaires à la résolution des problèmes dans lesquels sont satisfaites toutes les équations fondamentales de la théorie de l'élasticité ainsi que les conditions aux limites.

Les problèmes proposés illustrent le texte du cours théorique en le complétant à certains égards.

Outre les problèmes classiques, on a inséré dans ce manuel des problèmes présentant un intérêt pratique ou se caractérisant par l'utilisation de tel ou tel mode de résolution. Le manuel comporte pour l'essentiel des problèmes résolus; dans le but de stimuler le travail personnel, on a indiqué des variantes différentes de solution (▶) se différenciant, soit par la nature des difficultés, soit par les conditions aux limites et, pour lesquelles, sont données les réponses ou de références aux sources.

Les équations théoriques sont données en coordonnées curvilignes orthogonales α_1, α_2, α_3, ainsi que dans trois systèmes de coordonnées particulières: rectangulaire, cylindrique et sphérique et, pour le plan, en coordonnées rectangulaires et polaires. D'autres systèmes de coordonnées ne sont utilisés que pour des problèmes isolés.

Les solutions sont données en utilisant les constantes élastiques E, σ, ainsi que les paramètres λ, G.

L'auteur n'a pas tenu à unifier la marche à suivre dans la résolution des problèmes mais s'est efforcé, au contraire, d'utiliser divers modes de calcul pour compléter les explications théoriques.

Dans le *premier* chapitre sont étudiées les équations d'équilibre et les conditions aux limites, les formules nécessaires à l'étude de l'état de contrainte en un point, ainsi que les problèmes s'y rapportant.

Le *deuxième* chapitre est réservé à l'étude des déformations. Dans les problèmes proposés on a utilisé, à côté d'autres coordonnées, les coordonnées planes paraboliques et elliptiques.

Le *troisième* chapitre est consacré à l'application des équations générales à la résolution de problèmes particuliers de la théorie de

l'élasticité : à symétrie polaire et à axes de symétrie en systèmes variés d'axes de coordonnées.

Dans le *quatrième* chapitre on a montré comment il faut appliquer les solutions générales des équations de la théorie de l'élasticité à une série de problèmes de grande importance pratique.

Le *cinquième* chapitre analyse divers modes de résolution des problèmes plans en coordonnées rectangulaires. Les problèmes sont résolus en faisant appel aux relations contraintes-déplacements, à la variable complexe, à la méthode des fonctions initiales, aux solutions aux limites homogènes, à la méthode de différences finies.

Le chapitre *sixième* fournit les équations du problème plan en coordonnées polaires et étudie les méthodes de résolution des problèmes dans ces coordonnées.

Le *septième* chapitre est consacré à la torsion des barres prismatiques et cylindriques de sections constante et variable.

Les problèmes des contraintes et des déformations d'origine thermique sont traités dans le *huitième* chapitre.

Les problèmes de Hertz, en connexion avec la détermination des états de contrainte et de déformation dans la zone de contact de deux corps, sont analysés dans le *neuvième* chapitre.

Le chapitre *dixième* traite des équations dynamiques du problème de la théorie de l'élasticité. On y étudie les ondes stationnaires liées aux oscillations des corps élastiques, les contraintes provoquées par la rotation des corps et la propagation au sein de ces derniers d'ondes élastiques engendrées par l'action excitatrice d'une source motrice ou thermique.

Le chapitre *onzième* est consacré aux théorèmes généraux de la théorie de l'élasticité, aux principes variationnels et aux méthodes variationnelles qui en découlent de résolution des problèmes de la théorie de l'élasticité.

On a apporté à la seconde édition du livre les corrections nécessaires ainsi que des additions qui ont étendu la classe des problèmes thermo-élastiques (chapitre 8), des problèmes thermodynamiques (chapitre 10) ainsi que du calcul des poutres-cloisons (chapitre 5) ; on a étendu de même le chapitre 4 consacré aux résolutions générales des équations fondamentales de la théorie de l'élasticité et on a également complété la liste des ouvrages recommandés.

L'auteur remercie chaleureusement le docteur ès sciences techniques A. Alexandrov pour ses remarques formulées au cours de la préparation du livre à l'édition ainsi que les lecteurs ayant envoyé leurs observations sur la première édition de l'ouvrage.

NOTATIONS ET DÉFINITIONS

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — coordonnées curvilignes orthogonales

x, y, z — coordonnées cartésiennes

r, β, z — coordonnées cylindriques

r, β, α — coordonnées sphériques

$\left.\begin{matrix} u_x, u_y, u_z, \\ u_r, u_\beta, u_z, \\ u_r, u_\beta, u_\alpha \end{matrix}\right\}$ — projections du déplacement du point u sur les coordonnées fixes de l'axe ($x, y, z; r, \beta, z; r, \beta, \alpha$) — composantes du vecteur déplacement

$\left.\begin{matrix} X_x, Y_x, Z_x, \\ X_y, Y_y, Z_y, \\ X_z, Y_z, Z_z \end{matrix}\right\}$ — composantes du tenseur des contraintes en coordonnées rectangulaires

$\left.\begin{matrix} R_r, B_r, Z_r, \\ R_\beta, B_\beta, Z_\beta, \\ R_z, B_z, Z_z \end{matrix}\right\}$ — idem en coordonnées cylindriques

$\left.\begin{matrix} R_r, B_r, A_r, \\ R_\beta, B_\beta, A_\beta, \\ R_\alpha, B_\alpha, A_\alpha \end{matrix}\right\}$ — idem en coordonnées sphériques

ρ — densité du matériau

$E = G\dfrac{3\lambda + 2G}{\lambda + G}$ — module d'élasticité longitudinale

$\sigma = \dfrac{\lambda}{2(\lambda + G)}$ — nombre de Poisson

$\left.\begin{matrix} \mu = G = \dfrac{E}{2(1+\sigma)} \\ \lambda = \dfrac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \end{matrix}\right\}$ — paramètres de Lamé

$\left.\begin{matrix} e_{xx}, e_{xy}, e_{xz}, \\ e_{yx}, e_{yy}, e_{yz}, \\ e_{zx}, e_{zy}, e_{zz} \end{matrix}\right\}$ — composantes du tenseur des déformations dans le système de coordonnées rectangulaires

τ — temps

t — température

$\sigma_\nu, \tau_\nu, p_\nu$ — contraintes normale, tangentielle et totale à l'élément de surface de normale ν

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — principales contraintes normales en un point

$\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}$ — principales contraintes tangentielles en un point

J_1, J_2, J_3 — invariants du tenseur des contraintes en un point

I_1, I_2, I_3 — invariants du tenseur des déformations en un point

$E = T + U = T - \Pi$ — énergie potentielle totale du corps

Π — énergie potentielle de déformation

T — travail des forces extérieures

U — travail des forces intérieures

K — énergie cinétique

CHAPITRE PREMIER

THÉORIE DES CONTRAINTES

I. EQUATIONS D'EQUILIBRE STATIQUE ET DYNAMIQUE

1. Coordonnées curvilignes orthogonales

$$\frac{\partial (H_h\Delta)}{\partial \alpha_h} - \frac{1}{2}\sum_{\nu} \frac{V_\nu \Delta}{g_\nu}\cdot\frac{\partial g_\nu}{\partial \alpha_h} +$$

$$+\sum \frac{\partial}{\partial \alpha_\nu}\left(\frac{V_h \Delta g_h}{\sqrt{g_\nu g_h}}\right) + H\Delta\sqrt{g_h} = \rho\Delta\sqrt{g_h}\frac{\partial^2 u_h}{\partial \tau^2}, \qquad (1.1)$$

où α_ν, α_h sont les coordonnées curvilignes orthogonales (plans mutuellement perpendiculaires);

H_h, V_ν les contraintes normales;

$V_h = H_\nu$ les contraintes tangentielles;

g_h, g_ν les coefficients de première forme quadratique;

$$ds^2 = \sum_1^3 g_h d^2\alpha_h,$$

$$g_h = \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_h}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha_h}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha_h}\right)^2,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_h} = \sqrt{g_h}\frac{\partial \alpha_h}{\partial x}, \text{ etc.}$$

$\sqrt{g_h}\,d\alpha_h = ds_h$ est la longueur de l'élément de la ligne des coordonnées;

$$\left.\begin{aligned} \cos(\alpha_1, x) &= \sqrt{g_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial x},\\ \cos(\alpha_1, y) &= \sqrt{g_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial y},\\ \cos(\alpha_1, z) &= \sqrt{g_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial z}\end{aligned}\right\}$$ cosinus directeurs de la normale à la surface α_1 au point $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$;

$\Delta = \sqrt{g_1 g_2 g_3}$ coefficient de l'unité de volume;

$\Delta V = \Delta\, d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_3$ volume élémentaire;

H force due à la masse rapportée à l'unité de volume dans la direction de la coordonnée α_h;

u_h, u_ν déplacements dans la direction des coordonnées curvilignes.

2. Coordonnées rectangulaires

$\alpha_1 = x,\ \alpha_2 = y,\ \alpha_3 = z$ — plans,
$g_1 = g_2 = g_3 = 1,\ \Delta = 1,\ dV = dx\,dy\,dz,\ ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$
Equations d'équilibre :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + X = 0 \quad \left(= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial \tau^2}\right),\\
&\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + Y = 0 \quad \left(= \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial \tau^2}\right),\\
&\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + Z = 0 \quad \left(= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial \tau^2}\right),
\end{aligned}\right\} \qquad (1.1a)$$

où X, Y, Z sont les projections des forces volumiques sur les axes x, y, z.

3. Coordonnées cylindriques

$\alpha_1 = r$ — cylindres de révolution ;
$\alpha_2 = \beta$ — plans passant par l'axe Oz ;
$\alpha_3 = z$ — plans parallèles au plan xOy (fig. 1).

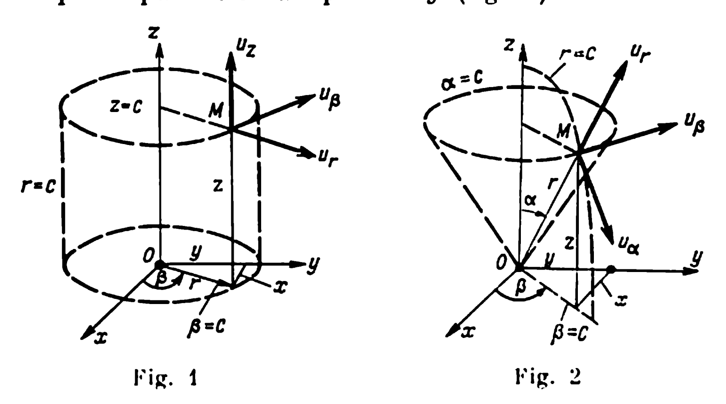


Fig. 1 Fig. 2

De la figure 1 il s'ensuit $x = r\cos\beta$, $y = r\sin\beta$, z ;
d'où $g_1 = 1,\ g_2 = r^2,\ g_3 = 1$; $\Delta = r$,

$$dV = r\,dr\,d\beta\,dz; \quad ds^2 = dr^2 + r^2\,d\beta^2 + dz^2.$$

Equations d'équilibre :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rR_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial R_\beta}{\partial \beta} + \frac{B_\beta}{r} + \frac{\partial R_z}{\partial z} + R = 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial \tau^2}\right),\\
&\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 B_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial B_\beta}{\partial \beta} + \frac{\partial B_z}{\partial z} + B = 0 \qquad \left(= \rho \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial \tau^2}\right),\\
&\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rZ_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial Z_\beta}{\partial \beta} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + Z = 0 \qquad \left(= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial \tau^2}\right),
\end{aligned}\right\} \qquad (1.1b)$$

R, B, Z étant les projections des forces volumiques sur les axes r, β, z.

4. Coordonnées sphériques

$\alpha_1 = r$ — sphères;
$\alpha_2 = \beta$ — plans passant par l'axe Oz;
$\alpha_3 = \alpha$ — cônes de sommet au point O (fig. 2).

De la figure 2 il s'ensuit

$$x = r \sin\alpha \cos\beta, \quad y = r \sin\alpha \sin\beta, \quad z = r\cos\alpha,$$

d'où

$$g_1 = 1, \; g_2 = r^2 \sin^2\alpha, \quad g_3 = r^2; \quad \Delta = r^2 \sin\alpha,$$

$$dV = r^2 \sin\alpha \, dr \, d\beta \, d\alpha,$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \sin^2\alpha \, d\beta^2 + r^2 \, d\alpha^2.$$

Equations d'équilibre:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial R_r}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\alpha}\cdot\frac{\partial R_\beta}{\partial\beta} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial R_\alpha}{\partial\alpha} + \\
&+ \frac{2R_r - B_\beta - A_\alpha + R_\alpha \operatorname{ctg}\alpha}{r} + R = 0 \quad \left(= \rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial\tau^2}\right), \\
&\frac{\partial B_r}{r} + \frac{1}{r\sin\alpha}\cdot\frac{\partial B_\beta}{\partial\beta} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial B_\alpha}{\partial\alpha} + \\
&+ \frac{3B_r + 2B_\alpha \operatorname{ctg}\alpha}{r} + B = 0 \quad \left(= \rho\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial\tau^2}\right), \\
&\frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\alpha}\cdot\frac{\partial A_\beta}{\partial\beta} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial A_\alpha}{\partial\alpha} + \\
&+ \frac{(A_\alpha - B_\beta)\operatorname{ctg}\alpha + 3A_r}{r} + A = 0 \quad \left(= \rho\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial\tau^2}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{1.1c}$$

R, B, A sont les projections des forces volumiques sur les axes r, β, α.

II. CONDITIONS À LA SURFACE

Les conditions aux limites locales sont vraies pour chaque point de la surface du corps à normale ν et prennent la forme

$$\left.\begin{aligned}
X_\nu &= X_x l + X_y m + X_z n, \\
Y_\nu &= Y_x l + Y_y m + Y_z n, \\
Z_\nu &= Z_x l + Z_y m + Z_z n,
\end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

où $l = \cos(x, \nu)$, $m = \cos(y, \nu)$, $n = \cos(z, \nu)$, $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

Les conditions aux limites intégrales, vraies pour une partie de la surface du corps, généralement constituant des plans, traduisent que la somme des contraintes sollicitant la surface est égale aux forces extérieures (problème 5.3).

Les contraintes normale et tangentielle s'exerçant sur la surface élémentaire à normale ν sont respectivement égales:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_\nu &= X_x l^2 + Y_y m^2 + Z_z n^2 + 2X_y lm + 2Y_z mn + 2Z_x nl, \\
\tau_\nu &= \sqrt{X_\nu^2 + Y_\nu^2 + Z_\nu^2 - \sigma_\nu^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

La contrainte totale $p_\nu = \sqrt{\sigma_\nu^2 + \tau_\nu^2}$.

Les contraintes normales principales au point σ_1, σ_2, σ_3 sont définies comme des racines de l'équation cubique:

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 + J_2\sigma - J_3 = 0, \qquad (1.4)$$

où J_i sont des invariants (grandeurs indépendantes du choix d'axes

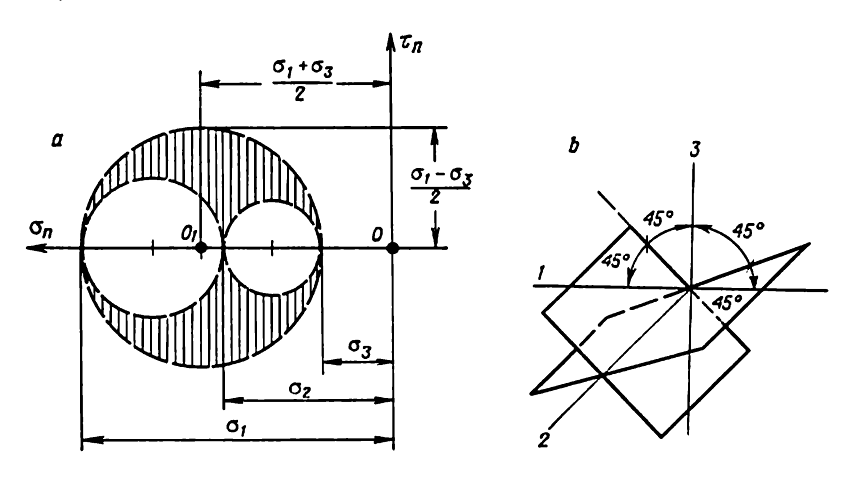


Fig. 3

de coordonnées) du tenseur des contraintes qui sont respectivement égaux à:

$$\left.\begin{aligned} &J_1 = X_x + Y_y + Z_z\ (R_r + B_\beta + Z_z,\ \text{etc.}),\\ &J_2 = X_xY_y + X_xZ_z + Y_yZ_z - X_y^2 - Y_z^2 - Z_x^2,\\ &J_3 = \begin{vmatrix} X_xY_xZ_x \\ X_yY_yZ_y \\ X_zY_zZ_z \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \qquad (1.5)$$

Les invariants du tenseur des contraintes s'expriment en fonction des contraintes principales ainsi:

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,\ J_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3,\ J_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \quad (1.6)$$

Les contraintes tangentielles principales s'obtiennent d'après les formules:

$$\tau_{12} = \pm\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2),\ \tau_{23} = \pm\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3),\ \tau_{31} = \pm\frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1). \quad (1.7)$$

Les valeurs des contraintes normales et tangentielles sur un élément de surface quelconque passant par le point considéré se situent sur la partie hachurée du plan $\sigma_n\tau_n$ (fig. 3, *a*).

Au cas où $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ les valeurs extrémales de la contrainte tangentielle sont définies d'après les formules

$$\tau_{\substack{max \\ min}} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \tag{1.8}$$

Les éléments de surface que sollicitent les contraintes tangentielles extrémales sont indiqués sur la figure 3, *b*.

Problèmes

1.1. Exprimer les équations d'équilibre d'un parallélépipède infiniment petit découpé dans le corps sur lequel agit une force d'attraction due à la masse M située au point ξ, η, ζ (fig. 4).

La masse du parallélépipède est $dm = \rho\, dV$, où $dV = dx\, dy\, dz$.
La distance séparant les masses dm et M est:

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}.$$

Selon la loi de Newton entre les masses dm et M se manifeste la force d'attraction

$$dF = k^2 \frac{M\, dm}{r^2} = k^2 \frac{\rho M}{r^2} dV,$$

où k^2 est la constante de gravitation.

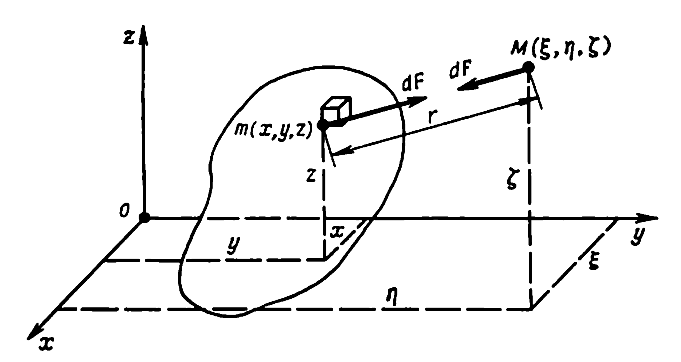


Fig. 4

Les projections de la force dF sur les axes de coordonnées sont égales à :

$$dF_x = k^2 \frac{\rho M}{r^2} dV \cos(r, x) = k^2 \frac{\rho M}{r^3} (\xi - x)\, dV,$$

$$dF_y = k^2 \frac{\rho M}{r^2} dV \cos(r, y) = k^2 \frac{\rho M}{r^3} (\eta - y)\, dV,$$

$$dF_z = k^2 \frac{\rho M}{r^2} dV \cos(r, z) = k^2 \frac{\rho M}{r^3} (\zeta - z)\, dV.$$

En portant les valeurs de $dF_{x,\,y,\,z}$ dans l'équation (1.1a) et en simplifiant par le volume élémentaire dV, il vient:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}+\rho\frac{k^2M}{r^3}(\xi-x)=0,$$

$$\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}+\rho\frac{k^2M}{r^3}(\eta-y)=0,$$

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}+\rho\frac{k^2M}{r^3}(\zeta-z)=0.$$

1.2. Exprimer les équations d'équilibre d'un parallélépipède

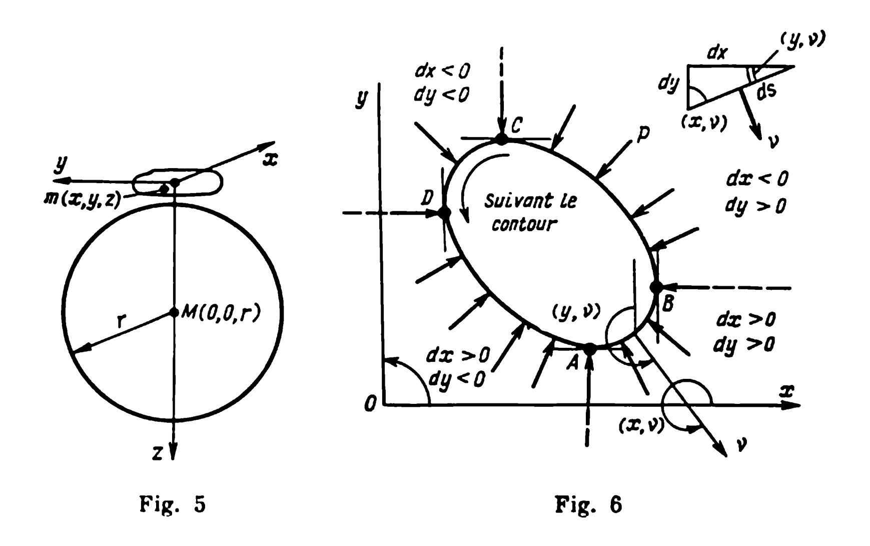


Fig. 5 Fig. 6

infiniment petit découpé dans le corps posé sur la surface terrestre et soumis à la gravitation terrestre (fig. 5).

En posant que $(\xi - x) = (\eta - y) = 0$ et $(\zeta - z) \approx r$ (problème 1.1), on obtient

$$dF_x = dF_y = 0, \qquad dF_z = \rho\frac{k^2M}{r^2}\,dV = \rho g\,dV,$$

où $g = k^2M/r^2 = 980{,}616$ cm/s² est l'accélération de la chute libre;

$k^2 = 6{,}67\cdot 10$ cm³/g·s² est la constante de gravitation;

$M = 5{,}98\cdot 10^{27}$ g la masse de la Terre;

$r = 6{,}3783\cdot 10^8$ cm le rayon de la Terre.

Les équations (1.1a) prennent la forme:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}=0,$$
$$\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}=0,$$
$$\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}+\rho g=0.$$

1.3. Exprimer les conditions aux limites, calculer les contraintes et les déformations pour le corps *ABCD* de faible épaisseur sollicité par une charge de compression qui agit normalement suivant le contour du corps avec une intensité p (fig. 6). Les forces volumiques sont considérées comme nulles.

D'après les équations (1.2);

$$X_\nu = X_x \cos(x, \nu) + X_y \cos(y, \nu),$$
$$Y_\nu = Y_x \cos(x, \nu) + Y_y \cos(y, \nu).$$

Les valeurs du cosinus doivent être choisies pour des valeurs positives de dx et dy, c'est-à-dire pour le tronçon *AB*:

$$\cos(x, \nu)=\frac{dy}{ds} \quad \text{(4-ième quadrant)},$$
$$\cos(y, \nu)=-\frac{dx}{ds} \quad \text{(3-ième quadrant)}.$$

Les conditions aux limites prennent la forme:

$$-p \cos(x, \nu) = X_x \cos(x, \nu) + X_y \cos(y, \nu),$$
$$-p \cos(y, \nu) = Y_x \cos(x, \nu) + Y_y \cos(y, \nu),$$

soit

$$p=-X_x+X_y\frac{dx}{dy}, \qquad p=Y_x\frac{dy}{dx}-Y_y.$$

L'état de contrainte au sein du corps se caractérise par un système de contraintes satisfaisant aux équations d'équilibre et aux conditions aux limites:

$$X_x = Y_y = -p, \quad X_y = Y_x = 0.$$

Les déformations seront:

$$e_{xx}=e_{yy}=-\frac{p(1-\sigma)}{E}, \quad e_{xy}=0.$$

Pour un corps de configuration arbitraire, on aura:

$$X_x = Y_y = Z_z = -p, \quad X_y = Y_z = Z_x = 0,$$
$$e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = -p/K, \quad e_{xy} = e_{yz} = e_{zx} = 0,$$
$$\theta = -3p/K,$$

où $K = E/(1-2\sigma)$ est un module triple de compression triaxiale.

1.4. Exprimer les conditions aux limites d'un profilé triangulaire de faible épaisseur auquel on applique suivant la ligne OB la charge $q = \gamma y$ (fig. 7).

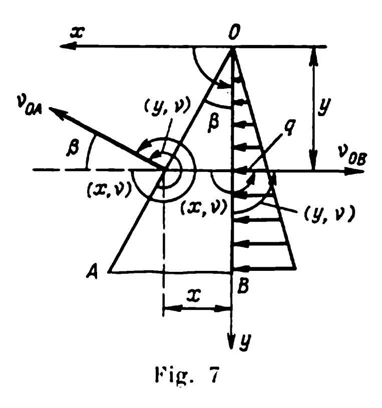


Fig. 7

Suivant la ligne OA ($x = y \operatorname{tg} \beta$), on a:

$$\cos (x, \nu) = \cos (360 - \beta) = \cos \beta,$$

$$\cos (y, \nu) = \cos (270 - \beta) = -\sin \beta,$$

$X_\nu = Y_\nu = 0$, les conditions aux limites prenant la forme:

$$X_x \cos \beta - X_y \sin \beta = 0, \quad Y_x \cos \beta - Y_y \sin \beta = 0.$$

Suivant la ligne OB ($x = 0$), on a:

$$\cos (x, \nu) = \cos 180° = -1, \quad \cos (y, \nu) = \cos 90° = 0,$$

$X_\nu = \gamma y$ étant la charge coïncidant avec la direction positive de l'axe Ox,

$Y_\nu = 0$.

Les conditions aux limites sont:

$$X_x = -\gamma y, \quad Y_x = 0.$$

1.5. Vérifier à quelles conditions satisfait le système électrostatique de contraintes maxwelliennes.

$$X_x = \frac{1}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right], \quad X_y = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y},$$

$$Y_y = \frac{1}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\right], \quad Y_z = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z},$$

$$Z_z = \frac{1}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right], \quad Z_x = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}.$$

Réponse: 1) L'équilibre s'établit pour

$$\nabla^2 U = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) U = 0.$$

2) Il y a équilibre avec les forces dues aux masses pour

$$X,\ Y,\ Z = -\frac{1}{4\pi}\nabla^2 U\left(\frac{\partial U}{\partial x},\ \frac{\partial U}{\partial y},\ \frac{\partial U}{\partial z}\right).$$

1.6. En l'absence de forces dues aux masses les contraintes peuvent s'exprimer au moyen de trois fonctions des contraintes.

Vérifier par substitution dans les équations homogènes (1.1a) les systèmes des contraintes suivants:

1) système de Maxwell (1870):

$$X_x = \frac{\partial^2\chi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\chi_3}{\partial z^2}, \quad X_y = -\frac{\partial^2\chi_1}{\partial x\,\partial y},$$

$$Y_y = \frac{\partial^2\chi_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\chi_1}{\partial x^2}, \quad Y_z = -\frac{\partial^2\chi_2}{\partial y\,\partial z},$$

$$Z_z = \frac{\partial^2\chi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\chi_2}{\partial y^2}, \quad Z_x = -\frac{\partial^2\chi_3}{\partial z\,\partial x}.$$

2) système de Morera (1892)*):

$$X_x = \frac{\partial^3\varphi_1}{\partial x\,\partial y\,\partial z}, \quad Y_y = \frac{\partial^3\varphi_2}{\partial y\,\partial z\,\partial x}, \quad Z_z = \frac{\partial^3\varphi_3}{\partial z\,\partial x\,\partial y},$$

$$X_y = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\varphi_3}{\partial z^2}\right),$$

$$Y_z = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi_3}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\right),$$

$$Z_x = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}\right).$$

Les fonctions mentionnées se déterminent à partir des équations [2]:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + (\sigma-2)\nabla^2\right]\chi_1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\chi_2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\chi_3 = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\chi_1 + \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\sigma-2)\nabla^2\right]\chi_2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\chi_3 = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\chi_1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\chi_2 + \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\sigma-2)\nabla^2\right]\chi_3 = 0,$$

et

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sigma\nabla^2\right)\varphi_1 - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(\varphi_2 + \varphi_3) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \sigma\nabla^2\right)\varphi_2 - \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(\varphi_3 + \varphi_1) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \sigma\nabla^2\right)\varphi_3 - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\varphi_1 + \varphi_2) = 0.$$

---

*) Pour d'autres formes de représentation voir: *Блох В. И.* Теория упругости. Изд. ГУ, Харьков, 1964, стр. 314 (en russe).

1.7. Problème de Lamé (1859).

Etablir les équations d'équilibre en coordonnées curvilignes isostatiques de Lamé pour un état plan des contraintes (courbes coïncidant en chaque point avec la direction des contraintes principales σ_1 et σ_2).

Soit s_1 la courbe isostatique coïncidant avec la direction de contrainte principale σ_1, tandis que s_2 est la courbe isostatique coïncidant avec σ_2 ; ρ_1 et ρ_2 sont les rayons de courbure de ces courbes isostatiques (fig. 8).

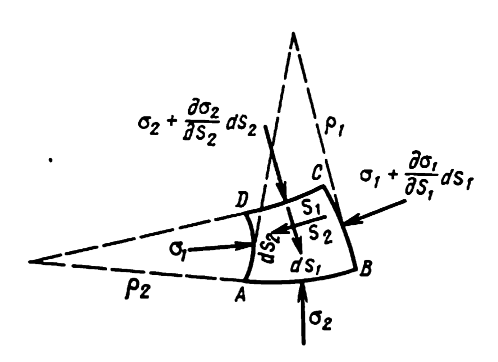


Fig. 8

En isolant au moyen de deux paires de courbes isostatiques int finiment rapprochées l'élément de surface $ABCD$ et en établissan- les conditions de son équilibre, il vient

$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial s_1} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_2} + S_1 = 0,$$

$$\frac{\partial\sigma_2}{\partial s_2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_1} + S_2 = 0,$$

où S_i sont les projections de la force volumique sur la direction ds_i.

1.8. Au point M d'un corps élastique les contraintes principales sont :

$$\sigma_1 = 50 \text{ N/cm}^2, \ \sigma_2 = -50 \text{ N/cm}^2, \ \sigma_3 = 75 \text{ N/cm}^2.$$

Chercher les contraintes p_ν totale, σ_ν normale et τ_ν tangentielle sollicitant l'élément de surface également incliné par rapport aux axes principaux (fig. 9).

Le problème se résout en utilisant les équations (1.2) et (1.3).

Réponse: $p_\nu = 59{,}5$ N/cm², $\sigma_\nu = 25$ N/cm², $\tau_\nu = 54{,}1$ N/cm².

1.9. En un point du corps élastique se manifestent les contraintes X_x, Y_y, Z_z, Y_x et X_y (fig. 10). Les contraintes $Y_z = Z_x = 0$.
Chercher les contraintes normales principales σ_i et les contraintes s'exerçant sur l'élément de surface parallèle à l'axe z, dont la normale forme avec l'axe x l'angle α.

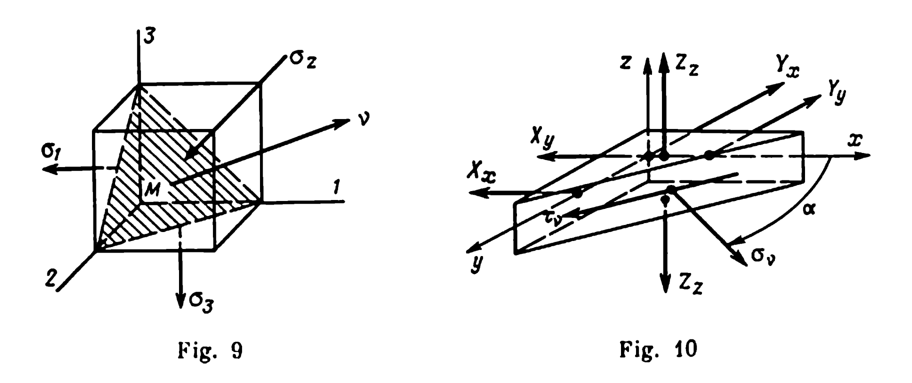


Fig. 9

Fig. 10

Le problème se résout en utilisant les équations (1.4) et (1.3).

Réponse:

$$\sigma_\nu = X_x \cos^2 \alpha + Y_y \sin^2 \alpha + X_y \sin 2\alpha,$$

$$\tau_\nu = \frac{1}{2} (Y_y - X_x) \sin 2\alpha + X_y \cos 2\alpha,$$

$$Z_\nu = 0; \quad \sigma_{1,2} = \frac{(X_x + Y_y)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{X_x - Y_y}{2}\right)^2 + X_y^2}.$$

1.10. En un point du corps élastique les contraintes sont: $X_x = 50$ N/cm², $Y_y = 0$, $Z_z = -30$ N/cm², $X_y = 50$ N/cm², $Y_z = -75$ N/cm², $Z_x = 80$ N/cm².
Chercher les contraintes principales normales et tangentielles.

Le problème se résout en utilisant les équations (1.4), (1.5) et (1.8).

Réponse: $\sigma_1 = 99{,}3$ N/cm², $\sigma_2 = 58{,}8$ N/cm², $\sigma_3 = -138$ N/cm², $\tau_{max} = 118{,}6$ N/cm².

CHAPITRE 2

THÉORIE DES DÉFORMATIONS

I. ÉQUATIONS DES DÉFORMATIONS EN COORDONNÉES ORTHOGONALES

1. Coordonnées curvilignes

$$\left.\begin{aligned} e_{hh} &= \frac{1}{\sqrt{g_h}}\frac{\partial u_h}{\partial \alpha_h} + \sum_{\nu} \frac{1}{\sqrt{g_h g_\nu}} \frac{\partial \sqrt{g_h}}{\partial \alpha_\nu} u_\nu, \\ e_{h\nu} &= \sqrt{\frac{g_h}{g_\nu}} \frac{\partial}{\partial \alpha_\nu}\left(\frac{u_h}{\sqrt{g_h}}\right) + \sqrt{\frac{g_\nu}{g_h}} \frac{\partial}{\partial \alpha_h}\left(\frac{u_\nu}{\sqrt{g_\nu}}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

où e_{hh} est la déformation linéaire relative;
$e_{h\nu}$ la déformation angulaire relative.
La dilatation cubique est

$$\theta = \sum_{1}^{3} e_{hh} = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\sqrt{g_2 g_3}\, u_1\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\sqrt{g_3 g_1}\, u_2\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3}\left(\sqrt{g_1 g_2}\, u_3\right)\right]. \qquad (2.2)$$

Les composantes de la rotation élémentaire sont:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{2\sqrt{g_2 g_3}}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\sqrt{g_3}\, u_3\right) - \frac{\partial}{\partial \alpha_3}\left(\sqrt{g_2}\, u_2\right)\right], \\ \omega_2 &= \frac{1}{2\sqrt{g_3 g_1}}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_3}\left(\sqrt{g_1}\, u_1\right) - \frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\sqrt{g_3}\, u_3\right)\right], \qquad (2.3) \\ \omega_3 &= \frac{1}{2\sqrt{g_1 g_2}}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\sqrt{g_2}\, u_2\right) - \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\sqrt{g_1}\, u_1\right)\right]. \end{aligned}$$

Notons que sur la base des formules du calcul vectoriel (div rot $u = 0$) les composantes de la rotation satisfont identiquement à l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\sqrt{g_2 g_3}\, \omega_1\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\sqrt{g_3 g_1}\, \omega_2\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3}\left(\sqrt{g_1 g_2}\, \omega_3\right) = 0.$$

Pour l'équation de continuité des déformations en coordonnées curvilignes voir références [2].

2. Coordonnées rectangulaires

Mesure des coordonnées en fonction des déplacements:

$$\delta x = u_x, \quad \delta y = u_y, \quad \delta z = u_z.$$

Equations des déformations:

$$e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$e_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad e_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad e_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}. \tag{2.1a}$$

Dilatation cubique

$$\theta = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \tag{2.2a}$$

Composantes de la rotation

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right), \quad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right),$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right). \tag{2.3a}$$

Equations de continuité des déformations:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x\,\partial y},\\
\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y\,\partial z},\\
\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z\,\partial x},\\
\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial e_{yz}}{\partial x}\right] &= 2\,\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y\,\partial z},\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial e_{zx}}{\partial y}\right) &= 2\,\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z\,\partial x},\\
\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right) &= 2\,\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x\,\partial y}.
\end{aligned}\right\} \tag{2.4a}$$

Le premier groupe d'identités de Saint-Venant traduit la continuité de courbures des fibres déformées du corps, le second la continuité d'angles relatifs de torsion [3].

Pour le problème plan en coordonnées rectangulaires seule intervient la première équation de (2.4a).

3. Coordonnées cylindriques

Mesure des coordonnées en fonction des déplacements:

$$\delta r = u_r, \quad \delta\beta = u_\beta / r, \quad \delta z = u_z.$$

Equations des déformations:

$$\begin{aligned}
&e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_{\beta\beta} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + \frac{u_r}{r}, \quad e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},\\
&e_{r\beta} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_r}{\partial \beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial r} - \frac{u_\beta}{r},\\
&e_{\beta z} = \frac{\partial u_\beta}{\partial z} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_z}{\partial \beta}, \quad e_{zr} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{2.1b}$$

Dilatation cubique

$$\theta = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \tag{2.2b}$$

Composantes de la rotation

$$\left.\begin{aligned}
&\omega_r = \frac{1}{2r}\left(\frac{\partial u_z}{\partial \beta} - r\frac{\partial u_\beta}{\partial z}\right),\\
&\omega_\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right),\\
&\omega_z = \frac{1}{2r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r u_\beta) - \frac{\partial u_r}{\partial \beta}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{2.3b}$$

Equations de continuité des déformations:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 e_{rr}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 e_{rz}}{\partial r\,\partial z},\\
&\frac{\partial^2 e_{\beta\beta}}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial \beta^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial e_{zz}}{\partial r} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial e_{\beta z}}{\partial \beta} + e_{rz}\right),\\
&\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 e_{rr}}{\partial \beta^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial e_{\beta\beta}}{\partial r}\right) - \frac{\partial e_{rr}}{\partial r} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2 (r e_{\beta r})}{\partial r\,\partial \beta},\\
&\frac{\partial^2 e_{r\beta}}{\partial z^2} - r\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial z}\left(\frac{e_{\beta z}}{r}\right) - \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2 e_{rz}}{\partial \beta\,\partial z} = -2\frac{\partial^2}{\partial \beta\,\partial r}\left(\frac{e_{zz}}{r}\right),\\
&\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{(r e_{\beta z})}{\partial r}\right] - \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 (r^2 e_{r\beta})}{\partial r\,\partial z} - \frac{\partial^2}{\partial r\,\partial \beta}\left(\frac{e_{rz}}{r}\right) =\\
&\qquad\qquad = -\frac{2}{r}\cdot\frac{\partial^2 e_{rr}}{\partial \beta\,\partial z},\\
&\frac{\partial^2 e_{rz}}{\partial \beta^2} - \frac{\partial^2 (r e_{\beta z})}{\partial r\,\partial \beta} - \frac{\partial^2 (r e_{\beta r})}{\partial z\,\partial \beta} = r\frac{\partial}{\partial z}\left[e_{rr} - \frac{\partial (r e_{\beta\beta})}{\partial r}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{2.4b}$$

Pour un problème plan en coordonnées polaires r et β seule intervient la troisième équation, car $e_{rz} = e_{\beta z} = e_{zz} = 0$, tandis que les déformations restantes sont fonction de r et β.

4. Coordonnées sphériques

Mesure des coordonnées en fonction des déplacements:

$$\delta r = u_r, \ \delta\beta = u_\beta/(r \sin\alpha), \quad \delta\alpha = u_\alpha/r.$$

Equations des déformations:

$$\left.\begin{aligned}
e_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_{\alpha\alpha} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + u_r\right),\\
e_{\beta\beta} &= \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{\partial u_\beta}{\partial\beta} + u_r + u_\alpha \operatorname{ctg}\alpha\right),\\
e_{r\beta} &= \frac{1}{r\sin\alpha}\frac{\partial u_r}{\partial\beta} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\beta}{r}\right),\\
e_{r\alpha} &= r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\alpha}{r}\right) + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_r}{\partial\alpha},\\
e_{\beta\alpha} &= \frac{1}{r\sin\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(u_\beta \sin\alpha) + \frac{\partial u_\alpha}{\partial\beta}\right].
\end{aligned}\right\} \qquad (2.1c)$$

Dilatation cubique

$$\theta = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r) + \frac{1}{r\sin\alpha}\left[\frac{1}{\partial\alpha}(u_\alpha \sin\alpha) + \frac{\partial u_\beta}{\partial\beta}\right]. \qquad (2.2c)$$

Composantes de la rotation :

$$\left.\begin{aligned}
\omega_r &= \frac{1}{2r\sin\alpha}\left[\frac{\partial u_\alpha}{\partial\beta} - \frac{\partial}{\partial\alpha}(u_\beta \sin\alpha)\right],\\
\omega_\beta &= \frac{1}{2r}\left[\frac{\partial u_r}{\partial\alpha} - \frac{\partial}{\partial r}(r u_\alpha)\right],\\
\omega_\alpha &= \frac{1}{2r\sin\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r u_\beta \sin\alpha) - \frac{\partial u_r}{\partial\beta}\right].
\end{aligned}\right\} \qquad (2.3c)$$

Pour les équations de continuité des déformations voir référence [2].

II. ÉTAT DE DÉFORMATION EN UN POINT

Les déformations principales en un point $-e_1, e_2, e_3$ *) se définissent par les trois racines de l'équation:

$$\begin{vmatrix} 2(e_{xx} - e) & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & 2(e_{yy} - e) & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & 2(e_{zz} - e) \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.5)$$

Les trois racines réelles de l'équation cubique (2.5) fournissent les trois principaux allongements e_1, e_2, e_3.

Sous forme développée le déterminant (2.5) devient

$$e^3 - I_1 e^2 + I_2 e - I_3 = 0, \qquad (2.6)$$

*) Pour les directions principales (*1*, *2*, *3*) les composantes du cisaillement sont nulles.

où

$$I_1 = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = e_1 + e_2 + e_3;$$

$$I_2 = e_{xx}e_{yy} + e_{yy}e_{zz} + e_{zz}e_{xx} - (e_{xy}^2 + e_{yz}^2 + e_{zx}^2)/4 = \\ = e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1,$$

$$I_3 = e_{xx}e_{yy}e_{zz} + e_{xy}e_{yz}e_{zx}/4 - \\ - (e_{xx}e_{yz}^2 + e_{yy}e_{zx}^2 + e_{zz}e_{xy}^2)/4 = e_1e_2e_3, \quad (2.7)$$

I_i étant les invariants de l'état de déformation au point considéré.

Les cosinus directeurs des déformations principales e_i se déterminent d'après les équations :

$$\left.\begin{aligned} 2(e_{xx} - e_i)\, l_i + e_{xy}m_i + e_{xz}n_i &= 0, \\ e_{yx}l_i + 2(e_{yy} - e_i)\, m_i + e_{yz}n_i &= 0, \\ e_{zx}l_i + e_{zy}m_i + 2(e_{zz} - e_i)\, n_i &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (2.8)$$

compte tenu de l'équation

$$l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1. \quad (2.9)$$

L'allongement relatif de l'élément linéaire, dont la direction est caractérisée par les cosinus l, m, n, se détermine au moyen de la formule

$$e = e_{xx}l^2 + e_{yy}m^2 + e_{zz}n^2 + e_{xy}lm + e_{yz}mn + e_{zx}nl. \quad (2.10)$$

III. FORMULE DE CESARO [1]

Etablissons d'après les équations (2.1), pour le cas de coordonnées rectangulaires (formule (2.1a)), la définition des déplacements u_h, u_v.

$$u_{x1} = u_{x0} + \omega_{y0}(z_1 - z_0)/2 - \omega_{z0}(y_1 - y_0)/2 + \\ + \int\limits_{M_1M_0} (U_x\,dx - U_y\,dy + U_z\,dz),$$

$$u_{y1} = u_{y0} + \omega_{z0}(x_1 - x_0) - \omega_{x0}(z_1 - z_0)/2 + \\ + \int\limits_{M_1M_0} (V_x\,dx + V_y\,dy + V_z\,dz),$$

$$u_{z1} = u_{z0} + \omega_{x0}(y_1 - y_0) - \omega_{y0}(x_1 - x_0)/2 + \\ + \int\limits_{M_1M_0} (W_x\,dx + W_y\,dy + W_z\,dz), \quad (2.11)$$

où

$$U_x = e_{xx} + (y_1 - y)\left(2\frac{\partial e_{xx}}{\partial y} - \frac{\partial e_{xy}}{\partial x}\right) + (z_1 - z)\left(2\frac{\partial e_{xx}}{\partial z} - \frac{\partial e_{zx}}{\partial x}\right)\Big/2;$$

$$U_y = e_{xy}/2 + (y_1 - y)\left(\frac{\partial e_{xy}}{\partial y} - 2\frac{\partial e_{yy}}{\partial x}\right)\Big/2 + (z_1 - z)\left(\frac{\partial e_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial e_{yz}}{\partial x}\right)\Big/2;$$

$$U_z = e_{zx}/2 + (y_1 - y)\left(\frac{\partial e_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial e_{yz}}{\partial x}\right)\Big/2 + (z_1 - z)\left(\frac{\partial e_{zx}}{\partial z} - 2\frac{\partial e_{zz}}{\partial x}\right)\Big/2. \quad (2.12)$$

Les grandeurs V_x, V_y, V_z et W_x, W_y, W_z s'obtiennent à partir de (2.12) par permutation circulaire des lettres x, y, z. L'indice 0 se rapporte au point M_0 et l'indice 1 au point M_1.

Problèmes

2.1. On donne les déplacements:

1) correspondant au système de contraintes de Maxwell

$$2Gu_x = \frac{\partial}{\partial x}(\chi_2 - \chi_3 - \chi_1);$$

$$2Gu_y = \frac{\partial}{\partial y}(\chi_3 - \chi_1 - \chi_2);$$

$$2Gu_z = \frac{\partial}{\partial z}(\chi_1 - \chi_2 - \chi_3);$$

2) correspondant au système de Morera

$$Eu_x = \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial z}[\varphi_1 - \sigma(\varphi_2 + \varphi_3)];$$

$$Eu_y = \frac{\partial^2}{\partial z\, \partial x}[\varphi_2 - \sigma(\varphi_3 + \varphi_1)];$$

$$Eu_z = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}[\varphi_3 - \sigma(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

voir problème 1.6;

3) $u_z = -xz/a$, $u_y = \sigma xy/a$, $u_x = [z^2 + \sigma(x^2 - y^2)]/(2a)$, où a est une constante.

Chercher les déformations et montrer qu'elles satisfont aux équations de continuité des déformations (2.4a).

2.2. Problème de Saint-Venant (1855).

Une barre cylindrique ou prismatique dont les génératrices sont parallèles à l'axe z qui coïncide avec la ligne des centres de gravité

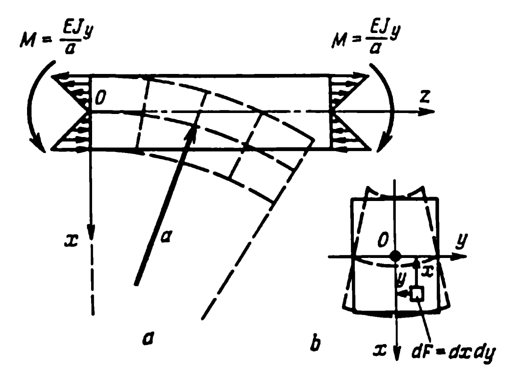


Fig. 11

des sections transversales est fléchie à ses bouts par des couples $M = EI_y/a$ situés dans le plan xOz (fig. 11,a).

Chercher les états de tension et de déformation.

On pose

$$Z_z = -Ex/a,$$

où a est une constante, tandis que les autres composantes du tenseur des contraintes sont nulles. Le système des contraintes adopté satisfait aux équations (1.1a) en l'absence des forces dues aux masses et aux conditions aux limites (1.2) suivant la surface latérale.

Aux sections des extrémités on a

$$M = \frac{EI_y}{a} = -\int Z_z x\,dF = \iint_F \frac{E}{a} x^2\,dx\,dy,$$

d'où $I_y = \iint_F x^2\,dx\,dy$ qui est le moment d'inertie de l'aire de la section par rapport à l'axe y.

Le moment des contraintes par rapport à l'axe x est nul vu que les axes x et y sont considérés comme des axes principaux.

Le vecteur principal des contraintes $\iint_F Z_z\,dx\,dy$ est nul, car l'axe Oz coïncide avec la ligne des centres de gravité.

Les composantes des déformations, selon les équations (3.1), valent:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\sigma x}{a}, \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{x}{a};\\ &\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

Les déformations obtenues satisfont aux conditions de continuité (2.4a). En intégrant les équations (a), il vient:

$$u_x = \frac{1}{2a}[z^2 + \sigma(x^2 - y^2)], \quad u_y = \frac{\sigma}{a} xy, \quad u_z = -\frac{xz}{a}.$$

La ligne des centres des sections transversales se déplace suivant la loi $u_x = z^2/(2a)$ et, pour des grandes valeurs de a, elle peut être assimilée à un cercle de rayon $a = EI_y/M$ et de centre au point $x = a$, $z = 0$, appelé centre de courbure.

Sur la figure 11,*b* est représentée la déformation de la section transversale qui a la forme d'un rectangle.

2.3. L'action d'une force ponctuelle P sur le demi-espace $z \geqslant 0$ engendre des déplacements égaux (voir le problème 4.4):

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{P}{4\pi G}\left(\frac{1-2\sigma}{R+z} - \frac{z}{R^2}\right)\frac{x}{R};\\ u_y &= \frac{P}{4\pi G}\left(\frac{1-2\sigma}{R+z} - \frac{z}{R^2}\right)\frac{y}{R};\\ u_z &= \frac{P}{4\pi G}\left[2(1-\sigma) + \frac{z^2}{R^2}\right]\frac{1}{R}, \end{aligned}$$

où

$$R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Chercher les déformations et vérifier si elles satisfont aux équations de continuité des déformations (2.4a).

2.4. Calculer la dilatation cubique pour les cas de coordonnées planes orthogonales suivantes : coordonnées paraboliques (les confocales α_1 et α_2 sont des paraboles), coordonnées elliptiques (les confocales α_1 sont des hyperboles et α_2 des ellipses).

Pour un problème plan la dilatation cubique, selon la formule (2.2), se calcule d'après la formule

$$\theta = \sum_{1}^{2} e_{hh} = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(\sqrt{g_2}\,u_1) + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}(\sqrt{g_1}\,u_2)\right],$$

où

$$g_h = \left(\frac{\partial x}{\partial\alpha_h}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\alpha_h}\right)^2, \quad \Delta = \sqrt{g_1 g_2}, \quad dV = \Delta\, d\alpha_1\, d\alpha_2,$$

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 = g_1\, d\alpha_1^2 + g_2\, d\alpha_2^2.$$

Utilisant l'expression complexe posons

$$\alpha_1 + i\alpha_2 = f\,(x+iy),$$

où $f\,(\ldots)$ est une fonction analytique.

Coordonnées paraboliques (fig. 12) :

$$\alpha_1 + i\alpha_2 = \sqrt{2\,(x+iy)}, \quad \alpha_1 = \sqrt{r+x}, \quad \alpha_2 = \sqrt{r-x},$$

où $r = \sqrt{x^2+y^2}$ est la distance du foyer $(x = y = 0)$;

$$x = \frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{2}, \quad 0 \leqslant \alpha_1 < \infty, \quad y = \pm\,\alpha_1\alpha_2, \quad 0 \leqslant \alpha_2 < \infty.$$

$$g_1 = g_2 = \alpha_1^2+\alpha_2^2, \quad \Delta = \sqrt{(\alpha_1^2+\alpha_2^2)^2} = \alpha_1^2+\alpha_2^2,$$

$$\theta = \frac{1}{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\,u_1 + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\,u_2\right].$$

Coordonnées elliptiques (fig. 13) :

$\alpha_1 + i\alpha_2 = \arcsin\,(x+iy)/a$, $\sin\alpha_1 = (s_1 - s_2)/(2a)$, $\operatorname{ch}\alpha_2 = (s_1 + s_2)/(2a)$, où

$$s_1 = \sqrt{(x+a)^2+y^2}, \quad s_2 = \sqrt{(x-a)^2-y^2}$$

sont les distances du point $M\,(x, y)$ des foyers situés sur l'axe x aux points $x_1 = -a$ et $x_2 = a$; $x = a\sin\alpha_1\operatorname{ch}\alpha_2$, $0 \leqslant \alpha_1 < 2\pi$; $y = \pm\cos\alpha_1\operatorname{sh}\alpha_2$, $0 \leqslant \alpha_2 < \infty$; $g_1 = g_2 = a^2(\cos^2\alpha_1 + \operatorname{sh}^2\alpha_2) = a^2\,\times$

$\times(\operatorname{ch}^2\alpha_2-\sin^2\alpha_1)$; $\Delta=a^2(\cos^2\alpha_1+\operatorname{sh}^2\alpha_2)$; $\theta=\frac{1}{a^2(\cos^2\alpha_1+\operatorname{sh}^2\alpha_2)}\times$
$\times\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(\sqrt{\cos^2\alpha_1+\operatorname{sh}^2\alpha_2}\,u_1)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(\sqrt{\cos^2\alpha_1+\operatorname{sh}^2\alpha_2}\,u_2)\right]$.

Si aux coordonnées α_1 et α_2 vient se joindre une troisième coordonnée indépendante des deux premières $\alpha_3 = z$, on obtiendra des

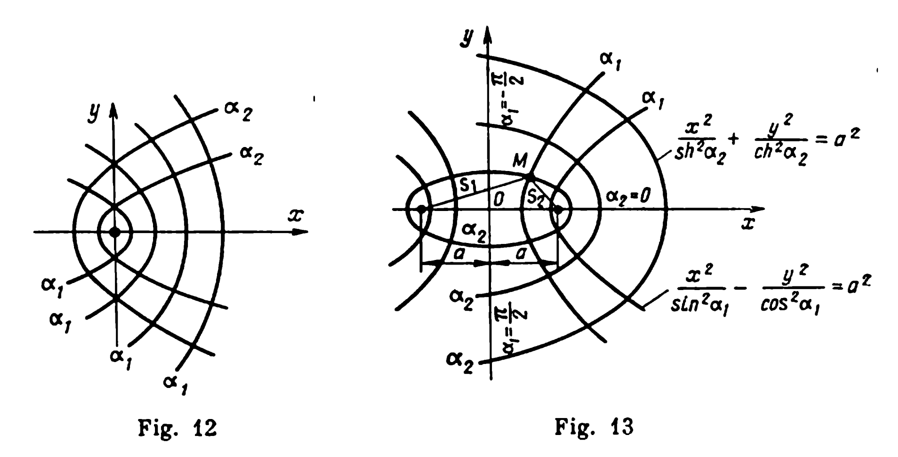


Fig. 12 Fig. 13

coordonnées cylindriques spatiales respectivement paraboliques et elliptiques.

2.5. Trouver les valeurs des déplacements u_1, u_2 et u_3 pour lesquelles les composantes de la rotation sont nulles.

En égalant à zéro l'expression (2.3), il vient:

$$u_1=\frac{\partial\Phi}{\sqrt{g_1}\,\partial\alpha_1}=\frac{\partial\Phi}{\partial s_1}; \quad u_2=\frac{\partial\Phi}{\sqrt{g_2}\,\partial\alpha_2}=\frac{\partial\Phi}{\partial s_2}; \quad u_3=\frac{\partial\Phi}{\sqrt{g_3}\,\partial\alpha_3}=\frac{\partial\Phi}{\partial s_3}.$$

Donc la rotation s'évanouit ($\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$), lorsque les projections des déplacements sont des dérivées partielles par rapport aux longueurs des lignes de coordonnées de la même fonction Φ représentant le potentiel des déplacements.

Aux cas de coordonnées rectangulaires $(g_1=g_2=g_3=1)$ $u_x=\frac{\partial\Phi}{\partial x}$, $u_y=\frac{\partial\Phi}{\partial y}$, $u_z=\frac{\partial\Phi}{\partial z}$.

2.6. Une plaque rectangulaire d'épaisseur h est limitée par les plans $z = \pm h/2$ et est sollicitée par des moments fléchissants M_x et M_y dont l'action se distribue de façon uniforme à ses extrémités (fig. 14,*a*).

Déterminer les grandeurs des moments pour lesquelles les courbures dans les plans xOz et yOz sont positives, c'est-à-dire que les centres de courbures se disposent dans le sens positif de l'axe z.

Posons

$$X_x = Eaz, \quad Y_y = Ebz,$$

où a et b sont des constantes, tandis que les autres composantes du tenseur des contraintes sont nulles.

Le système des contraintes adopté satisfait aux équations (1.1a) en l'absence des forces dues aux masses, ainsi qu'aux conditions aux limites (1.2) sur les plans libres $z = \pm h/2$.

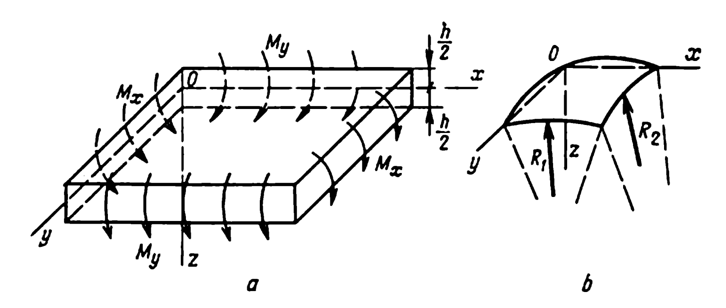


Fig. 14

En intégrant les équations des déformations (2.1a), on obtient pour les déplacements les expressions

$$\left.\begin{aligned} &u_x = (a - \sigma b)\, xz\,; \quad u_y = (b - \sigma a)\, yz\,; \\ &u_z = -\frac{a - \sigma b}{2} x^2 - \frac{b - \sigma a}{2} y^2 - \frac{\sigma (a + b)}{2} z^2. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

Les déplacements (a) satisfont aux équations de continuité (2.4a).

Il s'ensuit des équations (a) que chaque plan z = const subit un fléchissement engendrant dans les plans xOz et yOz des courbures respectivement égales à $(\sigma b - a)$ et $(\sigma a - b)$.

Si R_1 et R_2 sont les rayons de courbure (fig. 14,b), il vient

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = \sigma b - a, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = \sigma a - b,$$

d'où

$$a = -\frac{1}{1 - \sigma^2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{\sigma}{R_2}\right), \quad b = -\frac{1}{1 - \sigma^2}\left(\frac{1}{R_2} + \frac{\sigma}{R_1}\right).$$

L'intensité des moments fléchissants est donc:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} X_x z\, dz = -D\,(1/R_1 + \sigma/R_2)\,;$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} Y_y z\, dz = -D\,(1/R_2 + \sigma/R_1),$$

où $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \sigma^2)}$ est la rigidité cylindrique en flexion.

2.7. Chercher toutes les composantes de la déformation d'un corps symétrique par rapport à l'origine des coordonnées O.

Si la déformation est symétrique par rapport à l'origine des coordonnées, le déplacement u_R de tout point est dirigé suivant le

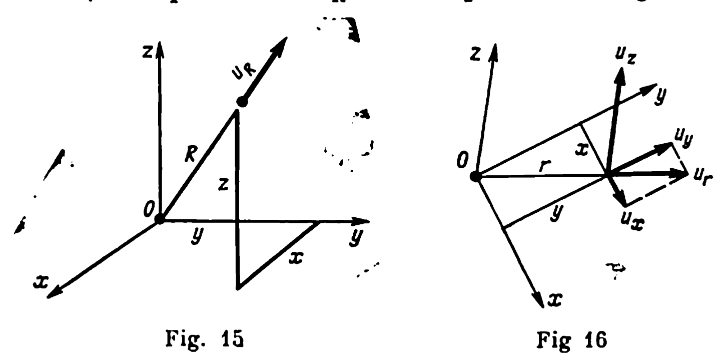


Fig. 15 Fig 16

rayon vecteur R et constitue une fonction de R. On a donc (fig. 15):

$$u_x=\frac{u_R}{R}x=f(R)x; \quad u_y=\frac{u_R}{R}y=f(R)y; \quad u_z=\frac{u_R}{R}z=f(R)z,$$

où

$$R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad f(R)=\frac{u_R}{R}.$$

Des équations (2.1a), il ressort:

$$e_{xx}=f(R)+\frac{x^2}{R}\cdot\frac{df(R)}{dR}; \quad e_{xy}=\frac{2xy}{R}\cdot\frac{df(R)}{dR}, \quad e_{yy}=f(R)+\frac{y^2}{R}\cdot\frac{df(R)}{dR}$$

$$e_{yz}=\frac{2yz}{R}\cdot\frac{df(R)}{dR}; \quad e_{zz}=f(R)+\frac{z^2}{R}\cdot\frac{df(R)}{dR}; \quad e_{zx}=\frac{2zx}{R}\cdot\frac{df(R)}{dR}.$$

2.8. Chercher toutes les composantes correspondant à un système de coordonnées rectangulaire pour une déformation d'un corps symétrique par rapport à l'axe Oz.

Désignons par u_r la projection du déplacement sur le plan xOy et par u_z sa projection sur l'axe Oz. En vertu de la symétrie axiale, u_r et u_z sont des fonctions de r et z, où

$$r=\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{(fig. 16)}.$$

Les déplacements seront égaux:

$$u_x=u_rx/r=f(r,z)x; \quad u_y=u_ry/r=f(r,z)y; \quad u_z=u_z(r,z),$$

où $f(r, z) = u_r/r$.

Des équations (2.1a) il ressort:

$$e_{xx}=f(r, z)+\frac{x^2}{r}\cdot\frac{\partial f(r, z)}{\partial r}; \quad e_{xy}=\frac{2xy}{r}\cdot\frac{\partial f(r, z)}{\partial r};$$

$$e_{yy}=f(r, z)+\frac{y^2}{r}\cdot\frac{\partial f(r, z)}{\partial r}; \quad e_{yz}=y\frac{\partial f(r, z)}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\cdot\frac{y}{r};$$

$$e_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad e_{zx}=x\frac{\partial f(r, z)}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\cdot\frac{x}{r}.$$

2.9. En un certain point du corps

$$e_{xx}=0{,}001, \; e_{yy}=-0{,}0005, \; e_{zz}=0{,}0005,$$
$$e_{xy}=0{,}003, \; e_{yz}=0{,}001, \; e_{zx}=0{,}0008.$$

Déterminer les principales déformations et leur orientation par rapport aux axes Ox, Oy, Oz.

Le problème se résout à l'aide des équations (2.5)-(2.9).

2.10. Déterminer les déformations principales et leur orientation pour le cas d'une déformation plane, quand $u_z = 0$, $u_x = u_x(x, y)$, $u_y = u_y(x, y)$.

Réponse. L'une des racines de l'équation (2.5) est nulle, les deux autres se déterminent à partir de l'équation quadratique

$$e^2-(e_{xx}+e_{yy})\,e+e_{xx}e_{yy}-e_{xy}^2/4=0.$$

L'une des trois déformations principales coïncide avec l'axe Oz, les deux autres se disposent dans le plan xOy.

CHAPITRE 3

ÉQUATIONS FONDAMENTALES DE LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ ET LEURS SOLUTIONS POUR DES CAS PARTICULIERS

I. COORDONNÉES CURVILIGNES ORTHOGONALES

1. Formes directe et inverse de la loi de Hooke

$$e_{hh}=\frac{1}{2G}\left(H_h-\frac{\sigma}{1+\sigma}\Theta\right); \quad e_{h\nu}=\frac{1}{G}H_\nu, \tag{3.1}$$

où

$$\Theta=\sum_1^3 H_h, \; H_h=\lambda\theta+2Ge_{hh}, \quad H_\nu=Ge_{h\nu}. \tag{3.2}$$

2. Équations exprimées en fonction des déplacements

$$(\lambda+2G)\sqrt{\frac{g_2g_3}{g_1}}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_1}-2G\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(\sqrt{g_3}\omega_3)-\frac{\partial}{\partial\alpha_3}(\sqrt{g_2}\,\omega_2)\right]+$$
$$+\sqrt{g_2g_3}\,H_1=0;$$
$$(\lambda+2G)\sqrt{\frac{g_3g_1}{g_2}}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_2}-2G\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_3}(\sqrt{g_1}\,\omega_1)-\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(\sqrt{g_3}\omega_3)\right]+$$
$$+\sqrt{g_3g_1}\,H_2=0;$$
$$(\lambda+2G)\sqrt{\frac{g_1g_2}{g_3}}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_3}-2G\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(\sqrt{g_2}\omega_2)-\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(\sqrt{g_1}\omega_1)\right]+$$
$$+\sqrt{g_1g_2}\,H_3=0,$$

où ω_i se déterminent d'après les formules (2.3), θ d'après la formule (2.2).

3. Équations exprimées en fonction des contraintes

Trois équations d'équilibre (1.1) et six équations de continuité des déformations [2] exprimées en fonction des contraintes suivant les formules (3.1) constituent le système complet d'équations utilisé pour la solution du problème des contraintes.

II. COORDONNÉES RECTANGULAIRES

1. Formes directe et inverse de la loi de Hooke

$$\left.\begin{aligned}
e_{xx}&=\frac{1}{2G}\left(X_x-\frac{\sigma}{1+\sigma}\Theta\right)^{*)}, & e_{xy}&=\frac{1}{G}X_y,\\
e_{yy}&=\frac{1}{2G}\left(Y_y-\frac{\sigma}{1+\sigma}\Theta\right), & e_{yz}&=\frac{1}{G}Y_z,\\
e_{zz}&=\frac{1}{2G}\left(Z_z-\frac{\sigma}{1+\sigma}\Theta\right), & e_{zx}&=\frac{1}{G}Z_x.
\end{aligned}\right\}\qquad(3.1a)$$

$$\left.\begin{aligned}
X_x&=\lambda\theta+2G\frac{\partial u_x}{\partial x}^{**)}, & X_y&=G\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right),\\
Y_y&=\lambda\theta+2G\frac{\partial u_y}{\partial y}, & Y_z&=G\left(\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y}\right),\\
Z_z&=\lambda\theta+2G\frac{\partial u_z}{\partial z}, & Z_x&=G\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\right),
\end{aligned}\right\}\qquad(3.2a)$$

où θ se détermine d'après la formule (2.2a).

---

*) L'autre forme est: $e_{xx}=\frac{1}{E}[X_x-\sigma(Y_y+Z_z)]$, etc.

**) L'autre forme est:

$$X_x=\frac{E}{1-\sigma^2}\left[\frac{\partial u_x}{\partial x}+G\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right],\ \text{etc.}$$

2. Équations exprimées en fonction des déplacements

$$\left.\begin{aligned}
(\lambda+2G)\frac{\partial\theta}{\partial x}-2G\left(\frac{\partial\omega_z}{\partial y}-\frac{\partial\omega_y}{\partial z}\right)+X=0,\\
(\lambda+2G)\frac{\partial\theta}{\partial y}-2G\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial z}-\frac{\partial\omega_z}{\partial x}\right)+Y=0,\\
(\lambda+2G)\frac{\partial\theta}{\partial z}-2G\left(\frac{\partial\omega_y}{\partial x}-\frac{\partial\omega_x}{\partial y}\right)+Z=0,
\end{aligned}\right\} \quad (3.3a)$$

ou

$$\left.\begin{aligned}
G\nabla^2 u_x+(\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial x}+X=0,\\
G\nabla^2 u_y+(\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial y}+Y=0,\\
G\nabla^2 u_z+(\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial z}+Z=0,
\end{aligned}\right\} \quad (3.3a')$$

où

$$\nabla^2(\ldots)=\frac{\partial^2(\ldots)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(\ldots)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(\ldots)}{\partial z^2}.$$

Les équations (3.3a′) peuvent être écrites sous la forme:

$$\left.\begin{aligned}
(1-2\sigma)\nabla^2 u_x+\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{1-2\sigma}{G}X=0,\\
(1-2\sigma)\nabla^2 u_y+\frac{\partial\theta}{\partial y}+\frac{1-2\sigma}{G}Y=0,\\
(1-2\sigma)\nabla^2 u_z+\frac{\partial\theta}{\partial z}+\frac{1-2\sigma}{G}Z=0.
\end{aligned}\right\} \quad (3.3a'')$$

3. Équations exprimées en fonction des contraintes

Trois équations d'équilibre (1.1a) et six équations de continuité constituent les équations de Beltrami-Mitchell:

$$\left.\begin{aligned}
\nabla^2 X_x+\frac{1}{1+\sigma}\cdot\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}&=-2\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\sigma}{1-\sigma}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)^{*)},\\
\nabla^2 Y_y+\frac{1}{1+\sigma}\cdot\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}&=-2\frac{\partial Y}{\partial y}-\frac{\sigma}{1-\sigma}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right),\\
\nabla^2 Z_z+\frac{1}{1+\sigma}\cdot\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}&=-2\frac{\partial Z}{\partial z}-\frac{\sigma}{1-\sigma}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right),\\
\nabla^2 X_y+\frac{1}{1+\sigma}\cdot\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\,\partial y}&=-\left(\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial x}\right),\\
\nabla^2 Y_z+\frac{1}{1+\sigma}\cdot\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\,\partial z}&=-\left(\frac{\partial Y}{\partial z}+\frac{\partial Z}{\partial y}\right),\\
\nabla^2 Z_x+\frac{1}{1+\sigma}\cdot\frac{\partial^2\Theta}{\partial z\,\partial x}&=-\left(\frac{\partial Z}{\partial x}+\frac{\partial X}{\partial z}\right),
\end{aligned}\right\} \quad (3.4a)$$

où $\Theta = X_x + Y_y + Z_z$.

---

*) Dans le cas d'un problème dynamique les seconds membres des équations au lieu de X, Y, Z contiennent respectivement

$$\left(X-\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial\tau^2}\right),\quad \left(Y-\rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial\tau^2}\right),\quad \left(Z-\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial\tau^2}\right).$$

Pour des forces volumiques X, Y, Z constantes les seconds membres des équations (3.4a) sont nuls (équations de Beltrami).

III. COORDONNÉES CYLINDRIQUES

1. Formes directe et inverse de la loi de Hooke

$$\left.\begin{aligned} e_{rr} &= \frac{1}{2G}\left(R_r - \frac{\sigma}{1+\sigma}\Theta\right), & e_{r\beta} &= \frac{1}{G}R_\beta, \\ e_{\beta\beta} &= \frac{1}{2G}\left(B_\beta - \frac{\sigma}{1+\sigma}\Theta\right), & e_{\beta z} &= \frac{1}{G}B_z, \\ e_{zz} &= \frac{1}{2G}\left(Z_z - \frac{\sigma}{1+\sigma}\Theta\right), & e_{zr} &= \frac{1}{G}Z_r. \end{aligned}\right\} \tag{3.1b}$$

$$\left.\begin{aligned} R_r &= \lambda\theta + 2G\frac{\partial u_r}{\partial r}, & R_\beta &= G\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_r}{\partial\beta} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\beta}{r}\right)\right], \\ B_\beta &= \lambda\theta + \frac{2G}{r}\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial\beta} + u_r\right), & B_z &= G\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial z} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_z}{\partial\beta}\right), \\ Z_z &= \lambda\theta + 2G\frac{\partial u_z}{\partial z}, & Z_r &= G\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right); \end{aligned}\right\} \tag{3.2b}$$

où θ est déterminé suivant la formule (2.2b).

2. Équations exprimées en fonction des déplacements

$$\left.\begin{aligned} &(\lambda+2G)\,r\frac{\partial\theta}{\partial r} - 2G\left[\frac{\partial\omega_z}{\partial\beta} - \frac{\partial}{\partial z}(r\omega_\beta)\right] + rR = 0, \\ &(\lambda+2G)\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial\beta} - 2G\left(\frac{\partial\omega_r}{\partial z} - \frac{\partial\omega_z}{\partial r}\right) + B = 0, \\ &(\lambda+2G)\,r\frac{\partial\theta}{\partial z} - 2G\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\omega_\beta) - \frac{\partial\omega_r}{\partial\beta}\right] + rZ = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.3b}$$

où ω_r, ω_β et ω_z sont déterminés à l'aide des formules (2.3b), ou

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2 u_r + \frac{1}{1-2\sigma}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial r} - \frac{2}{r^2}\cdot\frac{\partial u_\beta}{\partial\beta} - \frac{u_r}{r^2} = -\frac{R}{G}, \\ &\nabla^2 u_\beta + \frac{1}{1-2\sigma}\cdot\frac{\partial\theta}{r\partial\beta} + \frac{2}{r^2}\cdot\frac{\partial u_r}{\partial\beta} - \frac{u_\beta}{r^2} = -\frac{B}{G}, \\ &\nabla^2 u_z + \frac{1}{1-2\sigma}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial z} = -\frac{Z}{G}. \end{aligned}\right\} \tag{3.3b'}$$

où $\nabla^2(\ldots)$ sont déterminés à l'aide de la formule (4.1b).

3. Équations exprimées en fonction des contraintes

Trois équations d'équilibre (1.1b) et six équations de continuité des déformations:

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla^2 R_r + \frac{2}{r^2}(R_r - B_\beta) - \frac{4}{r^2}\cdot\frac{\partial R_\beta}{\partial\beta} + \frac{1}{1+\sigma}\cdot\frac{\partial^2\Theta}{\partial r^2} = 0,\\
&\nabla^2 B_\beta + \frac{2}{r^2}(R_r - B_\beta) + \frac{4}{r^2}\cdot\frac{\partial B_r}{\partial\beta} + \frac{1}{1+\sigma}\cdot\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)\Theta = 0,\\
&\nabla^2 Z_z + \frac{1}{1+\sigma}\cdot\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} = 0,\\
&\nabla^2 R_\beta + \frac{1}{1+\sigma}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\Theta}{r\,\partial\beta}\right) + \frac{2}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\beta}(R_r - B_\beta) - \frac{4}{r^2}R_\beta = 0,\\
&\nabla^2 B_z + \frac{1}{1+\sigma}\cdot\frac{\partial^2\Theta}{r\,\partial\beta\,\partial z} + \frac{2}{r^2}\cdot\frac{\partial Z_r}{\partial\beta} - \frac{B_z}{r^2} = 0,\\
&\nabla^2 Z_r + \frac{1}{1+\sigma}\cdot\frac{\partial^2\Theta}{\partial r\,\partial z} - \frac{2}{r^2}\cdot\frac{\partial Z_\beta}{\partial\beta} - \frac{Z_r}{r^2} = 0,
\end{aligned}\right\}\quad (3.4b)$$

où $\Theta = R_r + B_\beta + Z_z$.

IV. COORDONNÉES SPHÉRIQUES

1. Formes directe et inverse de la loi de Hooke

$$\left.\begin{aligned}
&e_{rr} = \frac{1}{2G}\left(R_r - \frac{\sigma}{1+\sigma}\Theta\right), \quad e_{r\beta} = \frac{1}{G}R_\beta,\\
&e_{\beta\beta} = \frac{1}{2G}\left(B_\beta - \frac{\sigma}{1+\sigma}\Theta\right), \quad e_{\beta\alpha} = \frac{1}{G}B_\alpha,\\
&e_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2G}\left(A_\alpha - \frac{\sigma}{1+\sigma}\Theta\right), \quad e_{\alpha r} = \frac{1}{G}A_r.
\end{aligned}\right\}\quad (3.1c)$$

$$\left.\begin{aligned}
&R_r = \lambda\theta + 2G\frac{\partial u_r}{\partial r};\\
&B_\beta = \lambda\theta + \frac{2G}{r}\left(\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial u_\beta}{\partial\beta} + u_r + u_\alpha\operatorname{ctg}\alpha\right);\\
&A_\alpha = \lambda\theta + \frac{2G}{r}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha} + u_r\right);\\
&R_\beta = \frac{G}{r}\left[\frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{\partial u_r}{\partial\beta} + r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\beta}{r}\right)\right];\\
&B_\alpha = \frac{G}{r}\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial\alpha} + u_\beta\operatorname{ctg}\alpha + \frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{\partial u_\alpha}{\partial\beta}\right);\\
&A_r = \frac{G}{r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\alpha}{r}\right) + \frac{\partial u_r}{\partial\alpha}\right],
\end{aligned}\right\}\quad (3.2c)$$

où θ est déterminé à l'aide de la formule (2.2c).

2. Équations exprimées en fonction des déplacements

$$\left.\begin{aligned}
&(\lambda+2G)\, r\sin\alpha\,\frac{\partial\theta}{\partial r}-2G\left[\frac{\partial\omega_\alpha}{\partial\beta}-\frac{\partial}{\partial\alpha}(\omega_\beta\sin\alpha)\right]+\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +r\sin\alpha R=0;\\
&(\lambda+2G)\,\frac{1}{\sin\alpha}\,\frac{\partial\theta}{\partial\beta}-2G\left[\frac{\partial\omega_r}{\partial\alpha}-\frac{\partial}{\partial r}(r\omega_\alpha)\right]+\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +rB=0;\\
&(\lambda+2G)\sin\alpha\,\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}-2G\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\omega_\beta\sin\alpha)-\frac{\partial\omega_r}{\partial\beta}\right]+\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +r\sin\alpha A=0,
\end{aligned}\right\}\qquad(3.3c)$$

où ω_r, ω_β et ω_α sont déterminés d'après les formules (2.3c).

Pour le problème à axe de symétrie les déformations ne dépendent pas de la coordonnée β, $u_\beta = 0$; de plus

$$\omega_r = \omega_\alpha = 0, \quad \omega_\beta = \omega,$$

les équations obtenant la forme

$$\begin{aligned}
&(\lambda+2G)\, r\sin\alpha\,\frac{\partial\theta}{\partial r}+2G\,\frac{\partial}{\partial\alpha}(\omega\sin\alpha)+Rr\sin\alpha=0,\\
&(\lambda+2G)\,\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}-2G\,\frac{\partial}{\partial z}(r\omega)+rA=0,
\end{aligned}\qquad(3.3c')$$

où

$$\theta=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2u_r)+\frac{1}{r\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}(u_\alpha\sin\alpha),\qquad \omega=\frac{1}{2r}\left[\frac{\partial u_r}{\partial\alpha}-\frac{\partial}{\partial r}(ru_\alpha)\right].$$

Pour une autre forme des équations en fonction des déplacements voir la monographie [4] p. 152.

3. Équations exprimées en fonction des contraintes

Trois équations d'équilibre (1.1b) et six équations de continuité des déformations [2] sont exprimées en fonction des contraintes en conformité avec les formules (3.1).

Problèmes

3.1. Ecrire les principales équations exprimées en fonction des contraintes pour un problème à axe de symétrie (axe z) en coordonnées cylindriques.

Selon les équations (1.1b) et (3.4b), on a:
équations d'équilibre

$$\frac{\partial R_r}{\partial r}+\frac{\partial R_z}{\partial z}+\frac{R_r-B_\beta}{r}+R=0;\quad \frac{\partial Z_r}{\partial r}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}+\frac{Z_r}{r}+Z=0;$$

équations de continuité des déformations

$$\nabla^2 R_r - \frac{2}{r^2}(R_r - B_\beta) + \frac{1}{1+\sigma}\cdot\frac{\partial^2\Theta}{\partial r^2} = 0;$$

$$\nabla^2 B_\beta + \frac{2}{r^2}(R_r - B_\beta) + \frac{1}{1+\sigma}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial r} = 0;$$

$$\nabla^2 Z_z + \frac{1}{1+\sigma}\cdot\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} = 0;$$

$$\nabla^2 Z_r + \frac{1}{1+\sigma}\cdot\frac{\partial^2\Theta}{\partial r\,\partial z} - \frac{1}{r^2} Z_z = 0,$$

où

$$\nabla^2(\ldots) = \frac{\partial^2(\ldots)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial(\ldots)}{\partial r} + \frac{\partial^2(\ldots)}{\partial z^2}$$

et

$$\Theta = R_r + B_\beta + Z_z.$$

3.2. Ecrire les équations fondamentales, exprimées en fonction des déplacements, pour un problème à axe de symétrie (axe z) en coordonnées cylindriques et trouver leur solution.

Vu que le problème suppose un axe de symétrie, les déplacements et les déformations ne dépendent pas de l'angle, de plus,

$$u_\beta = \omega_r = \omega_z = 0.$$

Les équations (3.3b′) prennent la forme

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right) u_r + \frac{1}{1-2\sigma}\left[\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) u_r + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r\,\partial z}\right] = -\frac{R}{G},$$

$$\nabla^2 u_z + \frac{1}{1-2\sigma}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z\,\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z}\right) = -\frac{Z}{G}, \tag{a}$$

où

$$\nabla^2 \ldots = \frac{\partial^2 \ldots}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \ldots}{\partial r} + \frac{\partial^2 \ldots}{\partial z^2}.$$

Si les forces de masse ont un potentiel Π, c'est-à-dire si $R = \frac{\partial\Pi}{\partial r}$ et $Z = \frac{\partial\Pi}{\partial z}$, alors la solution particulière des équations inhomogènes (a) sera:

$$\bar{u}_r = \frac{1}{2G}\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \quad \bar{\bar{u}}_z = \frac{1}{2G}\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \tag{b}$$

où $\Phi = \Phi(r, z)$ se détermine en portant les expressions (b) dans les équations (a), ce qui conduit à l'équation

$$\nabla^2\Phi = \frac{1-2\sigma}{1-\sigma}\Pi.$$

Les contraintes se déterminent à l'aide des formules (3.2b) et valent :

$$\overline{R}_r=\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{\sigma}{1-\sigma}\Pi,\quad \overline{B}_\beta=\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{\sigma}{1-\sigma}\Pi,$$
$$\overline{Z}_z=\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+\frac{\sigma}{1-\sigma}\Pi,\quad \overline{R}_z=\overline{Z}_r=\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\,\partial z}. \tag{c}$$

La solution générale des équations (a), sous forme généralisée de Neuber, a l'aspect :

$$u_r=\frac{1}{2G}\frac{\partial}{\partial r}[F+4(1-\sigma)\varphi],\quad u_z=\frac{1}{2G}\frac{\partial}{\partial z}[F+4(1-\sigma)\varphi],$$

où

$$\nabla^2\nabla^2F=0,\quad \nabla^2\varphi=0,\quad \nabla^2F=4\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Les tensions seront égales à :

$$R_r=\frac{\partial^2F}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1-\sigma}{r}\frac{\partial}{\partial r}\int\nabla^2F\,dz^2,$$
$$B_\beta=\nabla^2F-\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+(1-\sigma)\frac{\partial^2}{\partial r^2}\int\nabla^2F\,dz^2,$$
$$Z_z=\nabla^2F-\frac{\partial^2F}{\partial z^2},\quad R_z=Z_r=-\frac{\partial^2F}{\partial r\,\partial z}. \tag{d}$$

La réponse est égale à la somme des solutions (c) et (d) ; sans changer les notations des contraintes, il vient :

$$R_r=\frac{\partial^2(\Phi-F)}{\partial r^2}+\nabla^2F+\frac{1-\sigma}{r}\frac{\partial}{\partial r}\int\nabla^2F\,dz^2+\frac{\sigma}{1-\sigma}\Pi,$$
$$B_\beta=\frac{1}{r}\frac{\partial(\Phi-F)}{\partial r}+\nabla^2F+(1-\sigma)\frac{\partial^2}{\partial r^2}\int\nabla^2F\,dz^2+\frac{\sigma}{1-\sigma}\Pi,$$
$$Z_z=\frac{\partial^2(\Phi-F)}{\partial z^2}+\nabla^2F+\frac{\sigma}{1-\sigma}\Pi,$$
$$R_z=Z_r=\frac{\partial^2(\Phi-F)}{\partial r\,\partial z},$$

▶ Pour des conditions identiques $u_\beta=\omega_r+\omega_z=0$, $R=\frac{\partial\Pi}{\partial r}$, $Z=\frac{\partial\Pi}{\partial z}$, en utilisant les équations (3.3b), déterminer $\theta=\theta(r,z)$ et $\omega_\beta=\omega(r,z)$.

Les équations (3.3b) prendront la forme :

$$\frac{\partial\theta}{\partial r}+\frac{K}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial z}(r\omega)=-\frac{1}{\lambda+2G}R,$$
$$\frac{\partial\theta}{\partial z}-\frac{K}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r\omega)=-\frac{1}{\lambda+2G}Z, \tag{a}$$

où

$$K=\frac{2G}{\lambda+2G}.$$

De la première équation (a), il s'ensuit que

$$\frac{\partial\theta}{\partial r}=-K\frac{\partial\omega}{\partial z}-\frac{1}{\lambda+2G}R. \qquad \text{(b)}$$

En dérivant l'expression (b) par rapport à z et en la portant dans la deuxième équation de (a) qui a été dérivée par rapport à r, il vient

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial(r\omega)}{\partial r}\right]=0.$$

En posant dans cette équation

$$\omega = R(r)\, Z(z) \qquad \text{(c)}$$

et en séparant les variables, on obtient deux équations:

$$\frac{d^2Z}{dz^2}-p^2Z=0; \quad \frac{d^2R}{d\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{dR}{d\alpha}+\left(1-\frac{1}{\alpha^2}\right)R=0,$$

où $\alpha = pr$, p étant un nombre quelconque.

En résolvant les équations obtenues, on trouve d'après (c),

$$\omega = Z_1(\alpha)\,(A_p \operatorname{ch} pz + B_p \operatorname{sh} pz)$$

et la somme correspondante des solutions en p, où $Z_1(\alpha) = E_pJ_1(\alpha) + F_pN_1(\alpha)$ est une fonction cylindrique de premier ordre; $J_1(\alpha)$ la fonction de Bessel de premier ordre et de première espèce; $N_1(\alpha)$ la fonction de Neumann de premier ordre; A_p, B_p, E_p, F_p étant des constantes arbitraires. Selon l'équation (b)

$$\frac{\partial\theta}{\partial r}=-Kp\,(A_p \operatorname{sh} pz+B_p \operatorname{ch} pz)\,Z_1(\alpha)-\frac{1}{\lambda+2G}R,$$

d'où

$$\theta=-K\,(A_p \operatorname{sh} pz+B_p \operatorname{ch} pz)\int Z_1(\alpha)\,d\alpha-\frac{1}{p(\lambda+2G)}\int R\,d\alpha+f(z)=$$

$$=K\,(A_p \operatorname{sh} pz+B_p \operatorname{ch} pz)\,Z_0(\alpha)-\frac{1}{p(\lambda+2G)}\int R\,d\alpha+f(z),$$

où $Z_0(\alpha) = E_pJ_0(\alpha) + F_pN_0(\alpha)$ est une fonction cylindrique d'ordre zéro.

3.3. Ecrire les équations fondamentales en fonction des déplacements pour un problème à symétrie polaire en coordonnées sphériques en fournissant la solution générale ainsi que la solution particulière.

Puisque le problème est de symétrie polaire, toutes les grandeurs ne dépendent que de r, en outre

$$u_\alpha = u_\beta = \omega_r = \omega_\beta = \omega_\alpha = 0.$$

La dilatation cubique d'après (2.2c) est

$$\theta = \frac{du_r}{dr} + 2\frac{u_r}{r}.$$

Il ne reste donc que la première équation (3.3c) qui prend la forme:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{du_r}{dr} + 2\frac{u_r}{r}\right) + R_1 = 0, \tag{a}$$

où

$$R_1 = \frac{R}{\lambda + 2G}.$$

La solution générale de l'équation homogène

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{du_r}{dr} + 2\frac{u_r}{r}\right) = 0$$

est obtenue successivement

$$\frac{du_r}{dr} + \frac{2u_r}{r} = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{d}{dr}(r^2 u_r) = 3C_1$$

et

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r^2}. \tag{b}$$

La solution particulière de l'équation inhomogène (a) sera obtenue en forme de solution générale (b) par la méthode de variation des constantes arbitraires en posant que C_1 et C_2 sont des fonctions de r:

$$\bar{u}_r = C_1(r)\, r + \frac{C_2(r)}{r^2}. \tag{c}$$

La dérivée première de la solution particulière

$$\frac{d\bar{u}_r}{dr} = C_1(r) - \frac{2}{r^3} C_2(r) \tag{d}$$

à la condition que

$$C_1'(r)\, r + \frac{1}{r^2} C_2'(r) = 0. \tag{e}$$

La dérivée seconde

$$\frac{d^2\bar{u}_r}{dr^2} = C_1'(r) + \frac{6}{r^4} C_2(r) - \frac{2}{r^3} C_2'(r). \tag{f}$$

En reportant (c), (d) et (f) dans l'équation (a), il vient

$$C_1'(r) - \frac{2}{r^3} C_2'(r) + R_1 = 0. \tag{g}$$

En résolvant en commun les équations (e) et (g), on obtient:

$$C_1(r) = -\int_c^r \frac{R_1}{3}\, dr, \quad C_2(r) = \int_c^r \frac{R_1 r^3}{3}\, dr. \tag{h}$$

En reportant l'expression (h) dans l'équation (c), on obtient la solution particulière.

3.4. Problème de Lamé (1859) [4].

Déterminer les déplacements et les contraintes au sein d'une enveloppe sphérique fermée soumise à l'intérieur ($r = a$) et à l'extérieur ($r = b$) à des pressions uniformément réparties (p_i et p_0).

Selon l'équation (a) du problème (3.3),

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r^2}$$

La dilatation cubique

$$\theta = \frac{du_r}{dr} + 2\frac{u_r}{r} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 u_r) = 3C_1.$$

Les contraintes selon les formules (3.2c) valent:

$$R_r = \lambda\theta + 2G\frac{du_r}{dr} = (3\lambda + 2G)C_1 - \frac{4G}{r^3}C_2;$$

$$B_\beta = A_\alpha = \lambda\theta + \frac{2G}{r}u_r = (3\lambda + 2G)C_1 + \frac{2G}{r^3}C_2.$$

Les conditions aux limites du problème prennent la forme:

$$\text{pour } r = a, \quad R_r = -p_i,$$
$$\text{pour } r = b, \quad R_r = -p_0.$$

En satisfaisant aux conditions aux limites, il vient:

$$C_1 = \frac{1}{3\lambda + 2G}\,\frac{p_i a^3 - p_0 b^3}{b^3 - a^3}, \quad C_2 = \frac{1}{4G}\cdot\frac{a^3 b^3 (p_i - p_0)}{b^3 - a^3}.$$

En se déformant la sphère conserve sa forme.

3.5. Problème de Lamé (1852) [4].

Déterminer la déformation d'une sphère de rayon a sous l'action de l'attraction mutuelle de ses particules.

Sur chaque unité de volume de la sphère agit une force radiale $R = -\rho g r/a$, où g est l'accélération de la pesanteur à la surface de la sphère (problème 1.2).

L'équation d'équilibre en présence de la force radiale acquiert l'aspect (problème 3.3):

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{du_r}{dr} + \frac{2u_r}{r}\right) - \frac{\rho g r}{a(\lambda + 2G)} = 0. \quad \text{(a)}$$

Profitant des résultats du problème (3.3), on trouve la solution générale de l'équation (a) sous la forme

$$u_r = C_1 r.$$

Pour une sphère pleine $C_2 = 0$.

La solution particulière est prise sous la forme

$$u_r = Br^3. \tag{b}$$

En reportant la solution (b) dans l'équation (a), il vient

$$B = \frac{\rho g}{10a(\lambda + 2G)},$$

le déplacement sera donc égal à

$$u_r = C_1 r + \frac{\rho g r^3}{10a(\lambda + 2G)}.$$

Comme la surface de la sphère est libérée des contraintes ($R_{r-a} = 0$), on trouve en définitive:

$$u_r = -\frac{1}{10}\frac{\rho g a r}{\lambda + 2G}\left(\frac{5\lambda + 6G}{3\lambda + 2G} - \frac{r^2}{a^2}\right).$$

Il est intéressant de noter qu'à l'intérieur de la sphère de rayon $a\sqrt{\frac{3-\sigma}{3+3\sigma}}$ la déformation radiale est un accourcissement, tandis qu'au dehors de cette sphère c'est un allongement. Ainsi donc dans des corps de très grandes dimensions l'attraction mutuelle des particules engendre de fortes contraintes initiales.

3.6. Ecrire les équations fondamentales en fonction des déplacements pour un problème à axe de symétrie en coordonnées sphériques et chercher la solution générale.

Comme le problème est à axe de symétrie toutes les grandeurs dépendent de r et de α; en outre, $u_\beta = \omega_r = \omega_\alpha = 0$, les équations (3.3c) prenant la forme:

$$(\lambda + 2G)\frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{2G}{r^2 \sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}(r\omega_\beta \sin\alpha) + R = 0;$$

$$(\lambda + 2G)\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} - 2G\frac{\partial}{\partial r}(r\omega_\beta) + rA = 0,$$

où selon (2.2c) et (2.3c),

$$\theta = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r) + \frac{1}{r\sin\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha}(u_\alpha \sin\alpha); \quad \omega_\beta = \frac{1}{2r}\left[\frac{\partial u_r}{\partial\alpha} - \frac{\partial}{\partial r}(ru_\alpha)\right].$$

Les équations seront homogènes pour $R = A = 0$:

$$\frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{K}{r^2\sin\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha}(\omega\sin\alpha) = 0; \quad \frac{\partial\theta}{\partial\alpha} - K\frac{\partial\omega}{\partial r} = 0, \tag{a}$$

où

$$\omega = r\omega_\beta, \quad K = \frac{2G}{\lambda + 2G}.$$

En posant

$$\theta = K\frac{\partial\Phi}{\partial r} \quad \text{et} \quad \omega = \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}, \tag{b}$$

on satisfait identiquement à la seconde équation (a), tandis que la première équation sera

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2}+\operatorname{ctg}\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}+r^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}=0.$$

Posant dans la dernière équation

$$\Phi = R(r)\,A(\alpha)$$

et séparant les variables, on obtient deux équations:

$$\frac{d^2R}{dr^2}-\frac{k(k+1)}{r^2}R=0,\quad \frac{d^2A}{d\alpha^2}+\operatorname{ctg}\alpha\frac{dA}{d\alpha}+k(k+1)A=0,$$

où k est un nombre quelconque.

En résolvant les équations obtenues, il vient:

$$\Phi = (A_k r^{k+1} + B_k r^{-k})\,[E_k P_k(\mu) + F_k Q_k(\mu)],$$

où $\mu = \cos\alpha$;

$P_k(\mu)$ sont les fonctions de Legendre de première espèce ou polynômes de Legendre *);

$Q_k(\mu)$ les fonctions de Legendre de seconde espèce (voir ch. 4 et [5]);

A_k, B_k, E_k, F_k étant des constantes arbitraires. Selon les formules (b):

$$\theta=K\frac{\partial\Phi}{\partial r}=K\,[A_k(k+1)\,r^k-$$
$$-B_k k r^{-(k+1)}]\,[E_kP_k(\mu)+F_kQ_k(\mu)];$$
$$\omega_\beta=\frac{\omega}{r}=\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}=-(A_kr^k+B_kr^{-k-1})\times$$
$$\times[E_kP_k'(\mu)+F_kQ_k'(\mu)]$$

ainsi qu'à la somme correspondante de solutions en k.

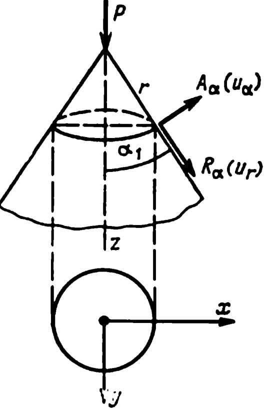


Fig. 17

3.7. Problème de Mitchell (1900) [4].

Chercher la répartition des contraintes dans un cône infini $\alpha = \alpha_1$ au sommet duquel agit le long de son axe une force P (fig. 17).

Par suite de la symétrie par rapport à l'axe z,

$$u_\beta = A_\beta = R_\beta = 0,\quad \omega_r = \omega_\alpha = 0.$$

Les équations (3.3c), en absence de forces dues aux masses, prendront l'aspect des équations (a) du problème (3.6).

*) Quand k est un nombre entier.

Les solutions des équations (a) du problème (3.6), pour le cas où les déplacements sont en raison inverse du rayon r ont la forme:

$$\left.\begin{aligned}
1)\quad & u_r=\frac{F}{4\pi G}\;\frac{\cos\alpha}{r};\\
& u_\alpha=-\frac{\lambda+3G}{2(\lambda+2G)}\;\frac{F}{4\pi G}\cdot\frac{\sin\alpha}{r};\\
& R_r=-\frac{3\lambda+4G}{\lambda+2G}\;\frac{F}{4\pi}\cdot\frac{\cos\alpha}{r^2};\\
& A_\alpha=B_\beta=\frac{G}{\lambda+2G}\;\frac{F}{4\pi}\cdot\frac{\cos\alpha}{r^2};\\
& R_\alpha=\frac{G}{\lambda+2G}\cdot\frac{F}{4\pi}\;\frac{\sin\alpha}{r^2}.
\end{aligned}\right\}\qquad (a)$$

$$\begin{aligned}
2)\quad & u_r=\frac{B}{r};\quad u_\alpha=-\frac{B}{r}\cdot\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};\\
& R_r=-2G\frac{B}{r^2};\quad R_\alpha=2G\frac{B}{r^2}\cdot\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};\\
& A_\alpha=2G\frac{B}{r^2}\cdot\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha};\\
& B_\beta=2G\frac{B}{r^2(1+\cos\alpha)}.
\end{aligned}$$

où F et B sont des constantes arbitraires.

Les conditions aux limites pour $\alpha=\alpha_1$ $A_\alpha=R_\alpha=0$, après simplification des termes proportionnels, se réduisent à une équation de la forme:

$$\frac{1}{\lambda+2G}\cdot\frac{F}{4\pi}+\frac{2B}{1+\cos\alpha_1}=0,$$

d'où

$$B=-\frac{1+\cos\alpha_1}{8\pi(\lambda+2G)}F.$$

La seconde condition, nécessaire à la détermination de F, sera obtenue en composant la somme des projections sur l'axe z du cône de la force P et des contraintes suivant la surface sphérique dont le centre est le sommet du cône. Il ressort de cette dernière condition que

$$P=\frac{F}{2(\lambda+2G)}[\lambda(1-\cos^3\alpha_1)+G(1-\cos\alpha_1)(1+\cos^2\alpha_1)].$$

Pour $\alpha_1=\pi/2$, on obtient en un point quelconque la pression sur le corps limité par un plan.

3.8. En utilisant les résultats du problème (3.2▶) déterminer en coordonnées cylindriques les déplacements pour un problème à axe de symétrie.

Selon les équations (2.2b) et (2.3b)

$$\theta=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial(ru_r)}{\partial r}+\frac{\partial u_z}{\partial z},\quad 2\omega=\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial r}. \tag{a}$$

En éliminant des équations (a) le déplacement u_z, il vient

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial(ru_r)}{\partial r}\right]+\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}=\frac{\partial\theta}{\partial r}+2\,\frac{\partial\omega}{\partial z}. \tag{b}$$

La solution générale de l'équation (b) sera donnée sous la forme

$$u_r=R(r)\ Z(z). \tag{c}$$

En reportant l'expression (c) dans l'équation homogène (b) et en séparant les variables on obtient deux équations:

$$\frac{d^2Z}{dz^2}-m^2Z=0;\quad \frac{d^2R}{d\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{dR}{d\alpha}+\left(1-\frac{1}{\alpha^2}\right)R=0, \tag{d}$$

où $\alpha = mr$, m est un nombre quelconque.

Les équations (d) admettent les solutions:

$$Z = A_m \operatorname{ch} mz + B_m \operatorname{sh} mz;\quad R = Z_1(\alpha) = G_mJ_1(\alpha) + H_mN_1(\alpha).$$

Selon l'équation (c)

$$u_r = (A_m \operatorname{ch} mz + B_m \operatorname{sh} mz)\,[G_mJ_1(\alpha) + H_mN_1(\alpha)]$$

ainsi qu'à la somme correspondante de solutions en m.

Selon la seconde équation homogène (a)

$$\frac{\partial u_z}{\partial r}=\frac{\partial u_r}{\partial z}=m\,(A_m \operatorname{sh} mz+B \operatorname{ch} mz)\,Z_1(\alpha),$$

d'où

$$u_z = -(A_m \operatorname{sh} mz + B_m \operatorname{ch} mz)\,[G_mJ_0(\alpha) + H_mN_0(\alpha)]+f(z)$$

(voir [5]) et à la somme correspondante de solutions en m.

Pour trouver la solution particulière on porte dans l'équation (b) les valeurs de θ et de ω fournies par le problème 3.2▶. Après de simples transformations, il vient

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial(r\bar{u}_r)}{\partial r}\right]+\frac{\partial^2\bar{u}_r}{\partial r^2}=(\bar{A}_p \operatorname{sh} pz+\bar{B}_p \operatorname{ch} pz)\,Z_1(\alpha),\,^{*)} \tag{e}$$

où

$$Z_1(\alpha) = [E_pJ_1(\alpha) + F_pN_1(\alpha)];$$

$$\bar{A}_p = (2-K)\,pA_p;$$

$$\bar{B}_p = (2-K)\,pB_p;\quad \alpha = pr.$$

En supposant que

$$\bar{u}_r = \bar{R}(r)\,(\bar{A}_p \operatorname{sh} pz + \bar{B}_p \operatorname{ch} pz),$$

---

*) Les forces volumiques R et Z sont supposées nulles.

où $\bar{R}(r)$ est une fonction inconnue de r et en reportant dans l'équation (e), il vient

$$\frac{d^2\bar{R}}{d\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{d\bar{R}}{d\alpha}+\left(1-\frac{1}{\alpha^2}\right)\bar{R}=\frac{1}{p^2}Z_1(\alpha). \tag{f}$$

La solution particulière de l'équation (f) prend la forme

$$\bar{R}(r)=-\frac{\alpha}{2p^2}Z_0(\alpha)\,^{*)}.$$

En définitive les déplacements seront

$$u_r=\sum_m[G_mJ_1(\alpha)+H_mN_1(\alpha)](A_m\operatorname{ch}mz+B_m\operatorname{sh}mz)-$$
$$-\sum_p\frac{\alpha}{2p^2}[E_pJ_0(\alpha)+F_pN_0(\alpha)](\bar{A}_p\operatorname{sh}pz+\bar{B}_p\operatorname{ch}pz),$$

où $\bar{A}_p$ et $\bar{B}_p$ se déterminent d'après les formules (e).

Selon la seconde équation (a)

$$u_z=\int\left(2\omega-\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)dr+f(z)=\sum_m[G_mJ_0(\alpha)+H_mN_0(\alpha)]\times$$
$$\times(A_m\operatorname{sh}mz+B_m\operatorname{ch}mz)+\sum_p\frac{1}{p}\left\{\frac{\alpha}{2p}(\bar{A}_p\operatorname{ch}pz+\bar{B}_p\operatorname{sh}pz)\times\right.$$
$$\times[E_pJ_1(\alpha)+F_pN_1(\alpha)]-2(A_p\operatorname{ch}pz+B_p\operatorname{sh}pz)\times$$
$$\left.\times[E_pJ_0(\alpha)+F_pN_0(\alpha)]\,^{**)}\right\}+f(z).$$

3.9. En utilisant les résultats fournis par le problème (3.6) déterminer en coordonnées sphériques les déplacements pour un problème à axe de symétrie.

Selon les équations (2.2c) et (2.3c),

$$\theta=\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r^2u_r)+\frac{1}{r^2\sin\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha}(ru_\alpha\sin\alpha),$$
$$\omega=\omega_\beta=\frac{1}{2r}\left[\frac{\partial u_r}{\partial\alpha}-\frac{\partial}{\partial r}(ru_\alpha)\right]$$

---

*) Dans la recherche de la solution particulière, il est tenu compte des formules:

$$Z_0'=-Z_1,\quad Z_1'=Z_0-\frac{1}{\alpha}Z_1.$$

**) Pour obtenir ces expressions, il est tenu compte des formules:

$$\int Z_1(\alpha)\,d\alpha=-Z_0(\alpha),\quad\int\alpha Z_0(\alpha)\,d\alpha=\alpha Z_1(\alpha).$$

ou bien

$$\frac{\partial U_r}{\partial r}+\frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha}(U_\alpha\sin\alpha)=r^2\theta\,;\quad \frac{\partial U_r}{\partial\alpha}-r^2\frac{\partial U_\alpha}{\partial r}=2r^3\omega, \qquad \text{(a)}$$

où

$$U_r = r^2u_r,\quad U_\alpha = ru_\alpha. \qquad \text{(b)}$$

En adoptant pour le système homogène (a) que

$$U_r=r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\quad \text{et}\quad U_\alpha=\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}, \qquad \text{(c)}$$

on satisfait identiquement à la seconde équation de (a), tandis que la première équation devient

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\sin\alpha\right)=0.$$

En posant dans cette dernière équation

$$\Phi\,(\alpha,\ r) = R\,(r)\,A\,(\alpha)$$

et en séparant les variables, on obtient deux équations:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)-n\,(n+1)\,R=0\,;$$

$$\frac{d^2A}{d\alpha^2}+\operatorname{ctg}\alpha\frac{dA}{d\alpha}+n\,(n+1)\,A=0.$$

En résolvant les équations obtenues, il vient

$$\Phi = (C_nr^n + D_nr^{-n-1})\,[E_nP_n\,(\mu) + F_nQ_n\,(\mu)].$$

Selon les équations (b) et (c)

$$u_r=\frac{U_r}{r^2}=\frac{\partial\Phi}{\partial r}=[C_nnr^{n-1}-D_n\,(n+1)\,r^{-n-2}]\times$$
$$\times\,[E_nP_n\,(\mu)+F_nQ_n\,(\mu)], \qquad \text{(d)}$$

$$u_\alpha=\frac{U_\alpha}{r}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}=(C_nr^{n-1}+D_nr^{-n-2})\,[E_nP'_n\,(\mu)+F_nQ'_n\,(\mu)]. \qquad \text{(e)}$$

Pour un système inhomogène (a) selon (b) et les données du problème (3.6) on a:

$$2r^3\omega = -2\,(A_kr^{k+3} + B_kr^{-k+2})\,[E_kP'_k\,(\mu) + F_kQ'_k\,(\mu)],$$
$$r^2\theta = K\,[A_k\,(k + 1)\,r^{k+2} - B_kkr^{-k+1}]\,[E_kP_k\,(\mu) + F_kQ_k\,(\mu)].$$

En adoptant pour la solution particulière la forme:

$$U_r=r^2\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial r}+\int 2r^3\omega\,d\alpha\quad \text{et}\quad U_\alpha=\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\alpha}, \qquad \text{(f)}$$

où

$$\int 2r^3\omega\,d\alpha= -2\,(A_kr^{k+3}+B_kr^{-k+2})\,[E_kP_k\,(\mu)+F_kQ_k\,(\mu)]$$

on satisfait de façon identique à la seconde équation de (a), tandis que la première équation prend la forme:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\alpha}\ \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\alpha}\sin\alpha\right)=$$

$$=(A_k r^{k+2}+\overline{B}r^{-k+1})\,[E_kP_k(\mu)+F_kQ_k(\mu)], \qquad (g)$$

où

$$\overline{A}_k=[K(k+1)+2(k+3)]\,A_k;$$

$$\overline{B}_k=-[Kk+2(k-2)]\,B_k.$$

En posant

$$\overline{\Phi}(\alpha,\ r)=\overline{R}(r)\,[E_kP_k(\mu)+F_kQ_k(\mu)]$$

et en reportant dans l'équation (g), on obtient après des simplifications adéquates

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)-k(k+1)\,\overline{R}=A_kr^{k+2}+\overline{B}_hr^{-k+1}.$$

d'où

$$\overline{R}(r)=\frac{\overline{A}_k}{2(2k+3)}r^{k+2}-\frac{\overline{B}_k}{2(2k-1)}r^{-k+1}$$

et

$$\overline{\Phi}=(\overline{\overline{A}}_kr^{k+2}+\overline{\overline{B}}_kr^{-k+1})\,[E_kP_k(\mu)+F_kQ_k(\mu)],$$

où

$$\overline{\overline{A}}_k=\frac{1}{2(2k+3)}[K(k+1)+2(k+3)]\,A_k;$$

$$\overline{\overline{B}}_k=\frac{1}{2(2k-1)}[Kk+2(k-2)]\,B_k.$$

Selon les formules (b) et (*f*)

$$\overline{u}_r=\frac{U_r}{r^2}=\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\int 2r^3\omega\,d\alpha=$$

$$=\{[(k+2)\,\overline{\overline{A}}_k+2A_k]\,r^{k+1}-[(k-1)\,\overline{\overline{B}}_k+2B_k]\,r^{-k}\}\times$$

$$\times[E_kP_k(\mu)+F_kQ_k(\mu)]; \qquad (h)$$

$$\overline{u}_\alpha=\frac{U_\alpha}{r}=\frac{1}{r}\ \frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\alpha}=(\overline{\overline{A}}_kr^{k+1}+\overline{\overline{B}}_kr^{-k})\,[E_kP'_k(\mu)+F_kQ'_k(\mu)] \qquad (i)$$

On obtiendra la valeur définitive des déplacements en sommant les expressions (d) et (e) avec (h) et (i):

$$u_r = \sum_n [C_n n r^{n-1} - D_n (n+1) r^{-n-2}] [E_n P_n (\mu) + F_n Q_n (\mu)] +$$

$$+ \sum_k \{[(k+2) \bar{\bar{A}}_k + 2A_k] r^{k+1} - [(k-1) \bar{\bar{B}}_k + 2B_k] r^{-k}\} \times$$

$$\times [E_k P_k (\mu) + F_k Q_k (\mu)];$$

$$u_\alpha = \sum_n (C_n r^{n-1} + D_n r^{-n-2}) [E_n P'_n (\mu) + F_n Q'_n (\mu)] +$$

$$+ \sum_k (\bar{\bar{A}}_k r^{k+1} + \bar{\bar{B}}_k r^{-k}) [E_k P'_k (\mu) + F_k Q'_k (\mu)]. \qquad \text{(j)}$$

Si les nombres n et k sont de même nature, les résultats de la solution de (j) peuvent se représenter par une seule somme; on obtient dans ce cas:

$$u_r = \sum_n [a_n r^{n+1} + b_n r^{-n} + C_n n r^{n-1} - D_n (n+1) r^{-n-2}] \times$$

$$\times [E_n P_n (\mu) + F_n Q_n (\mu)],$$

$$u_\alpha = \sum_n (\bar{\bar{A}}_n r^{n+1} - \bar{\bar{B}}_n r^{-n} + C_n r^{n-1} + D_n r^{-n-2}) [E_n P'_n (\mu) + F_n Q'_n (\mu)],$$

où

$$a_n = (n+2) \bar{\bar{A}}_n - 2A_n = \frac{n+1}{2(2n+3)} [K(n+2) + 2(n-1)] A_n;$$

$$b_n = -[(n-1) \bar{\bar{B}}_n + 2B_n] = \frac{n}{2(2n-1)} [K(n-1) + 2(n+1)] B_n;$$

$$\bar{\bar{A}}_n = \frac{1}{2(2n+3)} [K(n+1) + 2(n+3)] A_n;$$

$$\bar{\bar{B}}_n = \frac{1}{2(2n-1)} [Kn + 2(n-2)] B_n,$$

où A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n sont des constantes arbitraires.

Si l'origine des coordonnées ($r = 0$) appartient au corps considéré (problème interne), les constantes B_n et D_n deviennent alors nulles; dans le cas où $r \to \infty$ (problème extérieur), les constantes A_n et C_n s'annulent; si les pôles ($\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$) appartiennent au corps, la constante $F_n = 0$.

3.10. Problème de Neuber (1931) [6].

Déterminer l'état de contrainte d'une sphère de rayon a comprimée par les forces P appliquées aux pôles (fig. 18,a).

Avec l'application des charges extérieures à la surface de la sphère, où $r = a$ (problème intérieur), on a

$$R_r = \sigma(\alpha) \text{ et } A_r = \tau(\alpha). \qquad \text{(a)}$$

Ces fonctions doivent être développées en séries:

$$\sigma(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n P_n(\mu),\quad \tau(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\tau_n\frac{dP_n}{d\mu}=-\sum_{n=1}^{\infty}\tau_n\frac{dP_n}{d\alpha}\sin\alpha,$$

où les coefficients se déterminent d'après les formules:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_n&=\frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi}\sigma(\alpha)\,P_n(\cos\alpha)\sin\alpha\,d\alpha,\\ \tau_n&=\frac{2n+1}{2n(n+1)}\int_0^{\pi}\tau(\alpha)\frac{dP_n}{d\alpha}\sin\alpha\,d\alpha.\end{aligned}\right\}\qquad\text{(b)}$$

Dans le problème concerné

$$\sigma(\alpha)=\begin{cases}-p \text{ pour } 0<\alpha<\varepsilon \text{ et } \pi-\varepsilon<\alpha<\pi,\\ 0 \text{ pour } \varepsilon<\alpha<\pi-\varepsilon;\end{cases}$$

$\tau(\alpha)=0.$

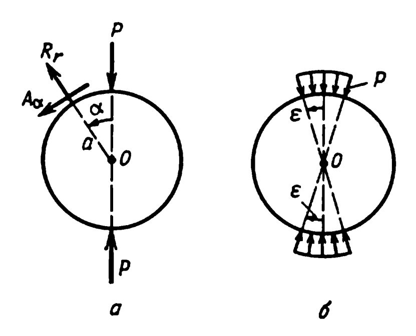


Fig. 18

Décomposons la charge normale en deux composantes:

$$\sigma(\alpha)=\sigma^{(1)}(\alpha)+\sigma^{(2)}(\alpha),$$

de sorte que

$$\sigma^{(1)}(\alpha)=\begin{cases}-p & \text{pour } 0<\alpha<\varepsilon,\\ 0 & \text{pour } \varepsilon<\alpha<\pi;\end{cases}$$

$$\sigma^{(2)}(\alpha)=\begin{cases}-p & \text{pour } \pi-\varepsilon<\alpha<\pi,\\ 0 & \text{pour } 0<\alpha<\pi-\varepsilon.\end{cases}$$

Examinons le cas de la première charge:

$$\sigma^{(1)}(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(1)}P_n(\cos\alpha),$$

où d'après les formules (b)

$$\sigma_n^{(1)} = -\frac{2n+1}{2} p \int_0^{\varepsilon} P_n(\cos\alpha)\sin\alpha\, d\alpha =$$

$$= (2n+1) P_n(\cos\alpha) = \frac{dP_{n+1}}{d\mu} - \frac{\partial P_{n-1}}{d\mu}\Bigg|_0^{\varepsilon} =$$

$$= -\frac{p}{2}\{[P_{n+1}(1) - P_{n+1}(\cos\varepsilon)] - P_{n-1}(1) - P_{n-1}(\cos\varepsilon)]\} =$$

$$= -\frac{p}{2}[P_{n-1}(\cos\varepsilon) - P_{n+1}(\cos\varepsilon)].$$

L'aire suivant laquelle se répartit la charge uniforme p pour des petites valeurs de l'angle ε est, à peu près, égale à $\pi a^2\varepsilon^2$ (fig. 18,*b*).

En effectuant la transition limite, autrement dit, en supposant que $\varepsilon \to 0$ et $p\pi a^2\varepsilon^2 \to P$, on obtient:

$$\sigma_n^{(1)} = -\frac{P}{2\pi a^2}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{P_{n-1}(\cos\varepsilon) - P_{n+1}(\cos\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \frac{-P(2n+1)}{4\pi a^2}.$$

Pour une force ponctuelle au pôle $\alpha = \pi$, on a de façon analogue

$$\sigma_n^{(2)} = -\frac{P}{2\pi a^2}\cdot\frac{2n+1}{2} P_n(-1) = -\frac{P}{4\pi a^2}(2n+1)(-1)^n.$$

Ainsi donc,

$$\sigma_n = \sigma_n^{(1)} + \sigma_n^{(2)} = \begin{cases} 0 & \text{pour } n = 1, 3, 5, \ldots, \\ -\frac{P}{2\pi a^2}(2n+1) & \text{pour } n = 0, 2, 4, \ldots, \end{cases}$$

la charge s'exprimant par la série

$$\sigma(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n P_n(\mu) = -\frac{P}{\pi a^2}\sum_{n=0,2,4,\ldots}^{\infty}\frac{2n+1}{2}P_n(\mu),$$

qui diverge aux pôles $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$ et converge dans tous les autres points.

Pour résoudre le problème il faut avoir l'expression des contraintes sous forme de polynômes de Legendre. Pour ce faire, profitons des résultats du problème (3.9) et des formules (3.2c):

$$R_r = \lambda\theta + 2G\frac{\partial u_r}{\partial r} =$$

$$= \sum_{n=0,2,4,\ldots}^{\infty}[(n+1)(2Ga_n + K\lambda A_n)r^n + 2Gn(n-1)C_n r^{n-2}]P_n(\mu);$$

$$A_r = \frac{G}{r}\left(r\frac{\partial u_\alpha}{\partial r} - u_\alpha + \frac{\partial u_r}{\partial\alpha}\right) =$$

$$= \sum_{n=0,2,4,\ldots}^{\infty} G[(a_n + n\bar{\bar{A}}_n)r^n + 2(n-1)C_n r^{n-2}]P_n'(\mu). \quad \text{(c)}$$

Pour la détermination des constantes arbitraires A_n et C_n utilisons les équations (a):

$$(n+1)(2Ga_n + K\lambda A_n)\, a^n + 2Gn\,(n-1)\, a^{n-2} C_n = -\frac{(2n+1)\,P}{2\pi a^2};$$

$$(a_n + n\bar{\bar{A}}_n) + 2\,(n-1)\, a^{-2} C_n = 0. \qquad \text{(d)}$$

En résolvant les équations (d), on trouve

$$A_n = -\frac{(2n+3)(2n+1)\,P/\pi a^{n+2} G}{4\,\{K\,(n+1)^2 + 2\,(n+3)(1-n) - (2n+3)\,[(n+2) - 2\,(n+1)\,\sigma]\}};$$

$$C_n = -\frac{a_n + n\bar{\bar{A}}_n}{2\,(n-1)} = \frac{(1+n)\, a^2 A_n}{2\,(1-n)(2n+3)} \times$$

$$\times\, [K\,(n+1)^2 + 2\,(n+3)(n+1) - 2\,(2n+3)].$$

En effectuant les calculs, on a tenu compte de ce que

$$\sigma = \frac{\lambda}{2\,(\lambda+G)}$$

Quand $r = 0$ seuls les termes correspondant aux coefficients A_0 et C_2 ne s'annulent pas et il est aisé de calculer les contraintes au centre de la sphère.

CHAPITRE 4

SOLUTIONS GÉNÉRALES DES ÉQUATIONS FONDAMENTALES DE LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ. RÉSOLUTION DES PROBLÈMES À TROIS DIMENSIONS

Etant donné que les différentes formes de solutions générales des équations fondamentales comportent des fonctions harmoniques ψ et des fonctions biharmoniques φ examinons les solutions des équations harmoniques et biharmoniques.

I. ÉQUATIONS HARMONIQUES (DE LAPLACE)

1. Coordonnées curvilignes orthogonales (Lamé)

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\sqrt{\frac{g_2 g_3}{g_1}}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\sqrt{\frac{g_3 g_1}{g_2}}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(\sqrt{\frac{g_1 g_2}{g_3}}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\right)\right]\psi = 0, \qquad (4.1)$$

où $\Delta = \sqrt{g_1 g_2 g_3}$.

En appliquant la méthode de séparation des variables, on obtient les formes normales des solutions de l'équation (4.1):

$$\psi = \psi_1(\alpha_1)\,\psi_2(\alpha_2)\,\psi_3(\alpha_3), \quad \psi = \sum \psi_1(\alpha_1)\,\psi_2(\alpha_2)\,\psi_3(\alpha_3). \qquad (4.2)$$

2. Coordonnées rectangulaires

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0\,; \qquad (4.1a)$$

$$\psi = X\,(x)\,Y\,(y)\,Z\,(z). \qquad (4.2a)$$

En portant (4.2a) dans (4.1a), il vient

$$\frac{1}{X}\,\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\cdot\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\cdot\frac{d^2Z}{dz^2} = 0,$$

et après séparation des variables

$$\frac{d^2X}{dx^2} - a^2X = 0\,; \quad \frac{d^2Y}{dy^2} - b^2Y = 0\,; \quad \frac{d^2Z}{dz^2} - c^2Z = 0$$

avec $a^2 + b^2 + c^2 = 0$.

En utilisant ces dernières équations, on obtient les formes normales de la solution :

$$\psi = e^{\pm ax}e^{\pm by}e^{\pm cz} = e^{\pm ax \pm by \pm cz} \qquad (4.2a')$$

et une série de cas particuliers :

$$\psi = \sum_{m,\,n} f\,(m,\,n)\,e^{\pm\sqrt{m^2+n^2}z}\,(\sin mx + \cos mx)\,(\sin ny + \cos ny) \qquad (4.2a'')$$

avec

$$a = im,\ b = in,\ c = \pm\sqrt{m^2 + n^2}\,;$$

$$\psi = \sum_{a,\,b} \psi\,(a,\,b)\,e^{\pm ax \pm by}{}^{\cos}_{\sin}\left(\sqrt{a^2+b^2}\,z\right) \qquad (4.2''')$$

avec $c = i\sqrt{a^2 + b^2}$.

L'expression la plus générale de la fonction harmonique [7] sera

$$\psi = \int_{-\pi}^{\pi} f\,[(x\cos\alpha + y\sin\alpha + iz),\ \alpha]\,d\alpha,$$

de laquelle on peut tirer différentes solutions particulières.

Il faut noter l'intérêt que présente la solution particulière (4.1a) dans la forme

$$\psi = [(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2]^{\frac{1}{2}},$$

où a, b et c sont des constantes.

3. Coordonnées cylindriques

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0\,; \qquad (4.1b)$$

$$\psi = R\,(r)\,B\,(\beta)\,Z\,(z). \qquad (4.2b)$$

En reportant les valeurs de ψ (4.2b) dans l'équation (4.1b), il vient

$$\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{1}{B}\cdot\frac{d^2B}{d\beta^2}+\frac{1}{Z}\cdot\frac{d^2Z}{dz^2}=0,$$

ou après séparation des variables

$$\frac{1}{Z}\cdot\frac{d^2Z}{dz^2}=m^2\,;\quad \frac{1}{B}\cdot\frac{d^2B}{d\beta^2}=-p^2\,;$$

$$\alpha^2\frac{d^2R}{d\alpha^2}+a\frac{dR}{d\alpha}+(\alpha^2-p^2)\,R=0,$$

où $\alpha = mr$, m et p étant des nombres entiers positifs.

En résolvant ces dernières équations, on obtient:

$$Z = A_m \operatorname{ch} mz + B_m \operatorname{sh} mz,$$
$$B = C_p \cos p\beta + D_p \sin p\beta,$$
$$R = E_p J_p(\alpha) + F_p N_p(\alpha),$$

où $J_p(\alpha)=\left(\frac{\alpha}{2}\right)^p\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(p+k)!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2k}$ est la fonction de Bessel d'ordre p de première espèce;

$N_p(\alpha)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_p(\alpha)}{\partial p}-(-1)^p\frac{\partial J_{-p}(\alpha)}{\partial p}\right]$ la fonction de Bessel d'ordre p de deuxième espèce ou fonction de Neumann.

L'expression définitive de la formule (4.2b) est:

$$\psi(r,\beta,r)=\sum_{m,p}[A_{m,p}J_p(mr)+B_{m,p}N_p(mr)]_{\sin}^{\cos}\quad(p\beta)_{\operatorname{sh}}^{\operatorname{ch}}(mz). \quad (4.2b')$$

4. Coordonnées sphériques

$$\nabla^2\psi=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\sin\alpha\right)+\frac{1}{\sin^2\alpha}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2}\right]=0, \quad (4.1c)$$

où

$$\psi = R\,(r)\,B\,(\beta)\,A\,(\alpha) \quad (4.2c)$$

qui est une fonction cubique sphérique (voir plus loin).

En reportant la valeur de ψ (4.2c) dans l'équation (4.1c), il vient

$$\frac{1}{R}\cdot\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{B\sin^2\alpha}\cdot\frac{d^2B}{d\beta^2}+\frac{1}{A\sin\alpha}\cdot\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{dA}{d\alpha}\sin\alpha\right)=0,$$

ou après la séparation des variables

$$\frac{1}{R}\cdot\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)=n(n+1);$$

$$\frac{1}{B}\cdot\frac{d^2B}{d\beta^2}=-m^2;$$

$$\frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{dA}{d\alpha}\sin\alpha\right)+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{\sin^2\alpha}\right]A=0$$

où $m = 0, 1, 2, \ldots$ est un nombre entier; n un nombre quelconque.

En résolvant les deux premières équations, on obtient:

$$R(r) = A_n r^n + B_n r^{-n-1}, \quad B(\beta) = C_m \cos m\beta + D_m \sin m\beta.$$

La troisième équation si l'on désigne $\cos\alpha$ par μ se ramène à l'équation associée de Legendre

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dA}{d\mu}\right]+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right]A=0$$

Les formes normales de solution de cette dernière équation pour $m=0$ (problèmes symétriques), n un nombre entier et $-1<\mu<1$ ont l'aspect

$$A(\mu) = E_nP_n(\mu) + F_nQ_n(\mu),$$

où

$P_n(\mu)=\frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n(\mu^2-1)^n}{d\mu^n}$ est la fonction de Legendre de première espèce ou polynôme de Legendre;

$Q_n(\mu)=\frac{1}{2}P_n(\mu)\,\mathrm{Log}\,\frac{1+\mu}{1-\mu}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}P_{k-1}(\mu)P_{n-k}(\mu)$ la fonction de Legendre de deuxième espèce.

Les valeurs successives des grandeurs mentionnées sont:

$$P_0(\mu)=1, \qquad Q_0(\mu)=\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,\frac{1+\mu}{1-\mu};$$

$$P_1(\mu)=\mu; \qquad Q_1(\mu)=P_1(\mu)Q_0(\mu)-1;$$

$$P_2(\mu)=\frac{1}{2}(3\mu^2-1); \qquad Q_2(\mu)=P_2(\mu)Q_0(\mu)-\frac{3}{2}\mu;$$

$$P_3(\mu)=\frac{1}{2}(5\mu^3-3\mu); \qquad Q_3(\mu)=P_3(\mu)Q_0(\mu)-\frac{5}{2}\mu^2-\frac{2}{3},$$

. . . .

La suite voir dans la monographie [4], partie II.

Pour $n\geqslant m$, nombres entiers, et $-1<\mu<1$

$$A(\mu) = E_{n,m}P_{n,m}(\mu) + F_{n,m}Q_{n,m}(\mu),$$

où

$$P_{n,m}(\mu) = (1-\mu^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(\mu)}{d\mu^m} = \frac{(1-\mu^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n n!} \cdot \frac{d^{n+m}}{d\mu^{n+m}} (\mu^2-1)^n,$$

$Q_{n,m}(\mu) = (1-\mu^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_n(\mu)}{d\mu^m}$ étant les fonctions associées de Legendre de première et de deuxième espèces, de puissance n et d'ordre m.

En particulier, $P_{n,0}(\mu) = P_n(\mu)$.

Les valeurs successives des grandeurs mentionnées sont:

$$P_{1,1}(\mu) = \sqrt{1-\mu^2};$$

$$P_{2,1}(\mu) = 3\mu\sqrt{1-\mu^2}, \quad P_{2,2}(\mu) = 3(1-\mu^2);$$

$$P_{3,1}(\mu) = \frac{3}{2}(5\mu^2-1)\sqrt{1-\mu^2}, \quad P_{3,2}(\mu) = 15\mu(1-\mu^2);$$

$$P_{3,3}(\mu) = 15(1-\mu^2)\sqrt{1-\mu^2}, \text{ etc.}$$

Les tables de ces fonctions pour $n = 1$: (1), . . ., 10 et $m = 0$, (1), . . . 4 sont données dans la référence [8].

Quand m est un nombre entier (0, 1, 2, . . .), $n = \nu$ un nombre complexe, de sorte que $\nu(\nu + 1) = 1 \pm bi$, où b est un nombre fixé à l'avance et, quand $-1 < \mu < 1$, on obtient

$$A(\mu) = E_{\nu m} P_{\nu m}(\mu) + F_{\nu m} Q_{\nu m}(\mu),$$

où $P_{\nu m}(\mu)$ et $Q_{\nu m}(\mu)$ sont des fonctions de Legendre associées de première et de deuxième espèces de puissance complexe $\nu(\nu + 1) = 1 \pm bi$ et d'ordre m. La forme définitive de la formule (4.2c) est la suivante:

$$\psi = \sum_{m,n} (A_n r^n + B_n r^{-n-1})(C_m \cos m\beta + D_m \sin m\beta) \times \times [E_{nm} P_{nm}(\mu) + F_{nm} Q_{nm}(\mu)]. \quad (4.2c')$$

Toute fonction homogène de puissance n des coordonnées x, y, z telle que $F_n(x, y, z)$, pour laquelle la condition $\nabla^2 F_n = 0$ est remplie, peut être transcrite en forme de fonction sphérique cubique

$$F_n(x, y, z) = r^n Y_n(\alpha, \beta),$$

où

$Y_n(\alpha, \beta) = A(\alpha) B(\beta) = [E_{nm} P_{nm}(\cos\alpha) + F_{nm} Q_{nm}(\cos\alpha)] (C_m \times \times \cos m\beta + D_m \sin m\beta)$ est une fonction sphérique de surface.

Dans les problèmes symétriques ($m = 0$)

$$Y_n(\alpha) = E_n P_n(\cos\alpha) + F_n Q_n(\cos\alpha).$$

5. Solutions complémentaires

Les solutions complémentaires sont obtenues par combinaison des solutions déjà connues:

a) combinaisons linéaires: $\sum \psi_k$, $\sum k\psi_k$;

b) combinaisons dérivées par rapport aux paramètres

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial k}, \quad \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial k^2}, \quad \frac{\partial^2 \psi_{km}}{\partial k\, \partial m}, \text{ etc.};$$

c) intégrales par rapport au paramètre avec fonction de pondération qui en dépend

$$\int f(k)\, \psi_k\, dk,$$

etc.;

d) dérivées et intégrales indéfinies par rapport à α_1, α_2, α_3, au cas où l'équation différentielle de Laplace ne contient pas explicitement les coordonnées α_1, α_2, α_3, par exemple, dans le cas de l'équation en coordonnées rectangulaires

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x\, \partial y}, \quad \int \psi_k\, dx, \ \operatorname{grad} \psi_k, \text{ etc.}$$

II. EQUATION BIHARMONIQUE

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0. \tag{4.3}$$

Solutions particulières:

a) $\varphi = x\psi,\ y\psi,\ z\psi,\ R^2\psi,$ (4.4)

où

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2};$$

b) tout polynôme de puissance inférieure à la troisième;

c) polynôme de toute puissance aux coefficients spécialement choisis qui satisfait à l'équation (4.3).

III. PROBLÈMES AUX LIMITES SUR LES ÉQUATIONS HARMONIQUES ET BIHARMONIQUES

Les problèmes aux limites sur les équations harmoniques et biharmoniques ont été examiné par F. Tricomi [9], au ch. 4.

Pour la résolution des problèmes sur la théorie de l'élasticité une grande importance acquièrent les problèmes aux limites se rapportant aux équations du type elliptique [$\nabla^2\psi = 0$, $\nabla^2\psi = F(x, y)$, $\nabla^2\nabla^2\varphi = 0$]: problèmes de Dirichlet, de Neumann et problème mixte.

1. Problème de Dirichlet (premier problème aux limites)

Déterminer la fonction harmonique ψ dans un domaine fermé D d'après ses valeurs connues à la limite du domaine C.

Il a été établi que pour chaque domaine dont le contour n'est pas interrompu et possède partout une tangente bien définie, ainsi

qu'une courbure qui varie constamment à l'exclusion d'un nombre fini de points de premier ordre, le problème de Dirichlet aux données continues sur le contour peut être réduit à l'équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce munie partout d'un noyau continu [9] de la forme :

$$\mu(\xi)-\lambda\int_0^1 K(\xi,\ \eta)\,\mu(\eta)\,d\eta=\frac{1}{\pi}\,f(\xi),$$

$$\lambda=1/\pi,\quad 0\leqslant\xi\leqslant 1, \tag{4.5}$$

de sorte qu'aux conditions mentionnées plus haut, se démontre le *théorème d'existence* pour les fonctions harmoniques et, au moyen des équations intégrales se résout le problème de Dirichlet.

Une des plus importantes méthodes de résolution du problème plan de Dirichlet est la méthode d'*applications conformes* basée sur le fait que cette application transforme l'équation de Laplace en elle-même [9], § 4.1. Presque tous les procédés efficaces de résolution du problème de Dirichlet, trouvés jusqu'à aujourd'hui, sont réalisés en faisant appel aux représentations conformes qui transforment le domaine donné D en un cercle ou un demi-plan, c'est-à-dire deux cas aux formules explicites exprimant les fonctions harmoniques qui prennent à la frontière C du domaine les valeurs données.

Le problème de Dirichlet se résout également par développement de la valeur limite de la fonction harmonique f (...) en séries orthogonales, compte tenu de la nature des limites du problème intérieur, avec détermination subséquente des coefficients inconnus de ces séries [voir équation (4.2c′)]. La fonction harmonique inconnue

$$\psi(r,\ \mu,\ \beta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} r^n P_{nm}(\mu)\,(C_{nm}\cos m\beta+D_{nm}\sin m\beta), \tag{4.6}$$

où $\mu=\cos\alpha$, $r<a$, a étant le rayon de la sphère considérée. Les coefficients inconnus C_{nm} et D_{nm} se calculent d'après la valeur limite de $f\ (r,\ \alpha,\ \beta)$ pour $r=a$:

$$f\,(\alpha,\ \beta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} a^n P_{nm}(\cos\alpha)\,(C_{nm}\cos m\beta+D_{nm}\sin m\beta), \tag{4.7}$$

où, selon les conditions d'orthogonalité,

$$C_{n0}=\frac{2n+1}{4\pi}\,\frac{1}{a^n}\int_0^{2\pi}d\beta\int_0^{\pi}f\,(\alpha,\ \beta)\,P_n\,(\cos\alpha)\sin\alpha\,d\alpha,$$

$$C_{nm}=\frac{2n+1}{2\pi}\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\,\frac{1}{a^n}\int_0^{2\pi}d\beta\int_0^{\pi}f\,(\alpha,\ \beta)\,P_{nm}(\cos\alpha)\times$$

$$\times\cos m\beta\sin\alpha\,d\alpha,$$

$$D_{nm}=\frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{1}{a^n}\int_0^{2\pi}d\beta\int_0^{\pi}f(\alpha,\beta)P_{nm}(\cos\alpha)\times$$

$$\times\sin m\beta\sin\alpha\,d\alpha,$$

$$n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Si la fonction de Green $g(x_0, y_0, x, y) = g(P_0, P)$ du domaine D est connue, c'est-à-dire la fonction harmonique de ce domaine qui prend à la limite C les mêmes valeurs que $\operatorname{Log} r$, où r est la distance d'un point arbitraire $P(x, y)$ jusqu'au point fixe $P_0(x_0, y_0)$, on peut aussitôt par application conforme du domaine D dans le cercle fournir la solution explicite du problème de Dirichlet, de même que d'un problème analogue plus général, tel celui de l'équation de Poisson

$$\nabla^2\varphi = F(x, y), \tag{4.8}$$

où F est la fonction continue donnée, qui joue un grand rôle dans les torsions de barres prismatiques et cylindriques [équation (7.9)], le calcul des membranes [10] [équation (5.45)], etc. Toutefois, la détermination de la fonction de Green g s'avère souvent non moins aisée que la solution du problème de Dirichlet aux valeurs générales à la frontière C *).

Pour la résolution du problème de Dirichlet et des problèmes analogues (problème de Neumann et problèmes mixtes), il existe un grand nombre de méthodes numériques: la méthode des différences finies, aboutissant au système d'équations aux différences finies avec cinq termes (5.37), la méthode de relaxation de Sawswell, la méthode variationnelle se basant sur le fait que la fonction cherchée ψ minimise l'intégrale

$$J(\psi)=\iint_D\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy \tag{4.9}$$

pour laquelle le rôle de l'équation d'Euler-Lagrange est joué par l'équation de Laplace

$$\nabla^2\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0. \tag{4.10}$$

En étudiant ensuite certaines fonctions

$$\psi(x,\ y;\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n), \tag{4.11}$$

où α_i sont des paramètres, on aboutit au problème d'extrémum pour la fonction J de n variables et on écrit les n conditions auxquelles elle doit satisfaire:

$$\frac{\partial J}{\partial\alpha_1}=\frac{\partial J}{\partial\alpha^2}=\ldots=\frac{\partial J}{\partial\alpha_n}=0. \tag{4.12}$$

---

*) Une des exceptions constitue le cas important quand le domaine D est une sphère ou un cercle de rayon a et de centre à l'origine des coordonnées.

Pour le choix des fonctions ψ, on peut profiter de la méthode de Ritz-Timochenko, de Boubnov-Galerkine, de Vlassov-Kantorovitch, etc. (voir le manuel [10] ch. I).

Donnons quelques résultats liés à la solution du problème de Dirichlet [11]:

a) le domaine D est un demi-espace $z > 0$,
la limite C est un plan $z = 0$,
la valeur limite de la fonction harmonique $f(x, y)$

$$\psi(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \frac{f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2]^{3/2}} \text{ est l'intégrale de Poisson ;} \tag{4.13}$$

la fonction $f(x, y)$ doit être telle qu'après application du plan $z = 0$ sur la sphère située en dehors du domaine D ([11], t. II,

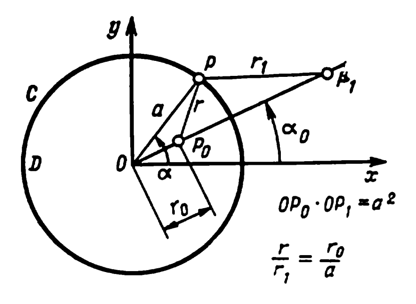


Fig. 19

ch. IV, § 1), on puisse obtenir un problème aux limites aux valeurs limites continues pour le domaine limité D' constituant l'image du domaine D;

b) le domaine D est un demi-plan $y > 0$,
la limite C la ligne $y = 0$,
la valeur limite de la fonction harmonique $f(x)$ est

$$\psi(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(x-\xi)^2+y^2}\,; \tag{4.14}$$

c) le domaine D est une sphère de rayon a,
la limite C la sphère (fig. 19),
la valeur limite de la fonction harmonique $f(a, \alpha, \beta) = f(\alpha, \beta)$,

$$\psi(r_0, \alpha_0, \beta_0) = -\frac{a^2-r_0^2}{4\pi a} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta}{[a^2+r_0^2-2ar_0\cos(\alpha-\alpha_0)]^{3/2}} \tag{4.15}$$

est la formule de Poisson;

d) le domaine D est un cercle de rayon a,
la limite C un cercle,
la valeur limite de la fonction harmonique $f(a, \alpha) = f(\alpha)$,

$$\psi(r_0, \alpha_0) = -\frac{a^2 - r_0^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha)\, d\alpha}{a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos(\alpha - \alpha_0)} \text{*)}. \qquad (4.16)$$

2. Problème de Neumann (deuxième problème aux limites)

Déterminer la fonction harmonique ψ (à la constante arbitraire près) dans un domaine fermé D d'après les valeurs connues de sa dérivée normale à la frontière du domaine C qui doivent satisfaire à la condition

$$\oint \frac{d\psi}{d\nu} ds = 0. \qquad (4.17)$$

Comme pour le problème de Dirichlet ce problème peut être résolu par les méthodes mentionnées plus haut.

Au cas d'un problème plan, on peut utiliser les relations existant entre deux fonctions harmoniques conjuguées, c'est-à-dire entre la partie réelle u et la partie imaginaire v d'une même fonction analytique $w = u + iv$, ayant la forme de l'équation de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x. \qquad (4.18)$$

Si l'on choisit une direction d'orientation quelconque ν formant avec l'axe x un angle α, alors

$$\frac{du}{d\nu} = u_x \cos\alpha + u_y \sin\alpha,$$

tandis que pour une direction qui lui est perpendiculaire $\nu'(\alpha + \pi/2)$, on obtient

$$\frac{dv}{d\nu'} = v_x \cos(\alpha + \pi/2) + v_y \sin(\alpha + \pi/2) =$$
$$= -v_x \sin\alpha + v_y \cos\alpha = u_x \cos\alpha + u_y \sin\alpha,$$

d'où

$$\frac{du}{d\nu} = \frac{dv}{d\nu'}. \qquad (4.19)$$

Etant donné que la direction tangentielle s et la direction de la normale intérieure n, pour toute courbe fermée contournée dans le sens positif, sont liées comme les directions ν et ν', il s'ensuit que

*) Les formules (4.15) et (4.16) s'étendent au cas des équations de Laplace au nombre quelconque n de variables x_i:

$$\nabla^2\psi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} = 0,$$ voir monographie [11], t, II, ch. IV. § 2.

si la fonction inconnue ψ du problème de Neumann, dont la dérivée normale acquiert à la frontière certaines valeurs données $f^*(s)$, est prise pour v, il vient alors que

$$\frac{du}{ds}=\frac{dv}{dn}=f^*(s),$$

de sorte que les valeurs limites u peuvent être calculées en négligeant la constante additive de peu d'importance suivant la formule

$$f(s)=\int_0^s f^*(s)\,ds, \tag{4.20}$$

qui, grâce à la relation (4.17), fournit de façon univoque une fonction déterminée. Ensuite, en résolvant le problème de Dirichlet aux valeurs limites (4.20), on obtient u.

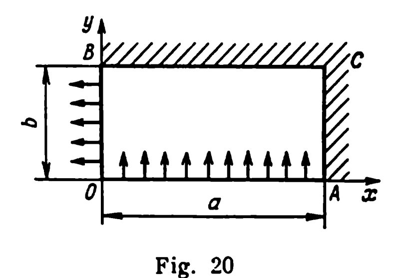


Fig. 20

Une fois u déterminé, pour passer à v, il suffit d'intégrer la différentielle totale

$$dv=-u_y\,dx+u_x\,dy,$$

ce qui se réalise par des simples quadratures ([9], ch. IV, § 4.5).

On rencontre le problème de Neumann quand il s'agit, par exemple, de déterminer le champ de température stationnaire $t(x, y, z)$ dans le cas d'un phénomène thermique stabilisé se caractérisant par le cas particulier de l'équation (8.23)

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}=0 \tag{4.21}$$

et les conditions aux limites correspondantes.

Donnons un exemple.

Chercher la température stationnaire t des points intérieurs d'une mince plaquette rectangulaire $OACB$ (fig. 20) à laquelle la chaleur est régulièrement fournie par le côté OA, et est régulièrement cédée par le côté OB. Les deux autres côtés AC et BC sont protégés par une couche isolante.

En désignant par Q la quantité de chaleur fournie par le côté OA et cédée par le côté OB, k étant le coefficient de conductibilité thermique, et en cherchant la solution de l'équation (4.21) dans les conditions aux limites

$$\left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{x=0}=\frac{Q}{kb}, \quad \left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{x=a}=0; \quad \left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y=0}=-\frac{Q}{ka}, \quad \left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y=b}=0,$$

il vient

$$t(x, y)=\frac{Q}{2kab}[(y-b)^2-(x-a)^2]+C,$$

où C est une constante.

3. Problème mixte (troisième problème aux limites)

Déterminer la fonction harmonique dans un domaine fermé D quand sur une partie du contour du domaine sont données les valeurs de la fonction, tandis que sur l'autre sont données les valeurs de la dérivée normale, ou bien, quand sont données les valeurs d'une certaine combinaison linéaire

$$A(s)\psi(s)+B(s)\frac{d\psi}{d\nu}=F(s) \qquad (4.22)$$

de valeurs limites d'une fonction harmonique inconnue ψ et de sa dérivée normale $d\psi/d\nu$.

IV. DIVERSES FORMES DE SOLUTIONS GÉNÉRALES DES ÉQUATIONS DE LAMÉ

1. Équations de Lamé en forme vectorielle

Les équations (3.3) en forme vectorielle ont l'aspect:

$$\nabla^2\left[u+\frac{1}{2(1-2\sigma)}r\theta\right]=0, \qquad (4.23)$$

ou

$$\nabla^2 u+\frac{1}{1-2\sigma}\operatorname{grad}\operatorname{div} u=0, \qquad (4.24)$$

où u est le vecteur de déplacement total du point;
r le rayon vecteur du point mené d'une origine quelconque d'un système de coordonnées rectangulaire [12];

$$\operatorname{div} u=\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \operatorname{grad} F=\frac{dF}{dr}=i\frac{\partial F}{\partial x}+j\frac{\partial F}{\partial y}+k\frac{\partial F}{\partial z}.$$

2. Solution de B. Galerkine [13], [14]

Sous forme vectorielle:

$$2Gu=2(1-\sigma)\nabla^2\varphi-\operatorname{grad}\operatorname{div}\varphi. \qquad (4.25)$$

En coordonnées rectangulaires

$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{i}\varphi_1 + \boldsymbol{j}\varphi_2 + \boldsymbol{k}\varphi_3$ est le vecteur de Galerkine;

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z}; \tag{4.26}$$

φ_i sont les fonctions biharmoniques quelconques.

Sous forme scalaire:

en coordonnées rectangulaires

$$2G(u_x, u_y, u_z) = 2(1-\sigma)\nabla^2\varphi_{1,2,3} - \frac{\partial \varphi}{\partial x, y, z}, \tag{4.25a}$$

où

$$\varphi = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z}. \tag{4.26a}$$

La contrainte se détermine d'après les formules (3.2a); *en coordonnées cylindriques*

$$\left.\begin{aligned} 2Gu_r &= 2(1-\sigma)(\cos\beta\nabla^2\varphi_1 + \sin\beta\nabla^2\varphi_2) - \frac{\partial\varphi}{\partial r}; \\ 2Gu_\beta &= 2(1-\sigma)(\sin\beta\nabla^2\varphi_1 - \cos\beta\nabla^2\varphi_2) - \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}; \\ 2Gu_z &= 2(1-\sigma)\nabla^2\varphi_3 - \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \end{aligned}\right. \tag{4.25b}$$

où

$$\varphi = \cos\beta\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} - \frac{\sin\beta}{r}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta} + \sin\beta\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} + \frac{\cos\beta}{r}\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial\beta} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial z}, \tag{4.26b}$$

$$\nabla^2(\ldots) = \frac{\partial^2\ldots}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\ldots}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\ldots}{\partial\beta^2} + \frac{\partial^2\ldots}{\partial z^2}.$$

Pour $r = \text{const}$ (enveloppes) $\nabla^2(\ldots) = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\ldots}{\partial\beta^2} + \frac{\partial^2\ldots}{\partial z^2}$, pour $r \to \infty$ $\nabla^2(\ldots) = \frac{\partial^2\ldots}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\ldots}{\partial z^2}$.

Les contraintes sont déterminées à l'aide des formules (3.2b); *en coordonnées sphériques*

$$\left.\begin{aligned} 2Gu_r &= 2(1-\sigma)(\cos\beta\sin\alpha\nabla^2\varphi_1 + \sin\beta\sin\alpha\nabla^2\varphi_2 + \\ &\quad + \cos\alpha\nabla^2\varphi_3) - \frac{\partial\varphi}{\partial r}; \\ 2Gu_\beta &= 2(1-\sigma)(\sin\beta\nabla^2\varphi_1 - \cos\beta\nabla^2\varphi_2) - \\ &\quad - \frac{1}{r\sin\alpha}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}; \\ 2Gu_\alpha &= 2(1-\sigma)(\cos\beta\cos\alpha\nabla^2\varphi_1 + \sin\beta\cos\alpha\nabla^2\varphi_2 - \\ &\quad - \sin\alpha\nabla^2\varphi_3) - \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}, \end{aligned}\right\} \tag{4.25c}$$

où
$$\left.\begin{aligned}
\varphi &= \cos\beta\sin\alpha\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}-\frac{\sin\beta}{r\sin\alpha}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta}+\frac{\cos\beta\cos\alpha}{r}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha}+\\
&+\sin\beta\sin\alpha\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}+\frac{\cos\beta}{r\sin\alpha}\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial\beta}+\cos\alpha\frac{\partial\varphi_3}{\partial r}+\\
&+\frac{\sin\beta\cos\alpha}{r}\cdot\frac{\partial\varphi_3}{\partial\beta}-\frac{\sin\alpha}{r}\cdot\frac{\partial\varphi_3}{\partial\alpha};\\
\nabla^2(\ldots) &= \frac{\partial^2\ldots}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\cdot\frac{\partial\ldots}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin^2\alpha}\cdot\frac{\partial^2\ldots}{\partial\beta^2}+\\
&+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\ldots}{\partial\alpha^2}+\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{r^2}\cdot\frac{\partial\ldots}{\partial\alpha}.
\end{aligned}\right\}\quad (4.26c$$

Pour $r=\mathrm{const}$

$$\nabla^2(\ldots)=\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2\ldots}{\partial\alpha^2}+\operatorname{ctg}\alpha\frac{\partial\ldots}{\partial\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha}\cdot\frac{\partial^2\ldots}{\partial\beta^2}\right).$$

Les contraintes sont déterminées à l'aide des formules (3.2c).

3. Solution de P. Papkovitch et de G. Grodski [15]

Sous forme vectorielle:

$$2G\boldsymbol{u} = 4(1-\sigma)\boldsymbol{\psi} - \operatorname{grad}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{\psi}+\psi_0). \qquad (4.27)$$

En coordonnées rectangulaires
$\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{i}\psi_1+\boldsymbol{j}\psi_2+\boldsymbol{k}\psi_3$ est le vecteur harmonique; ψ_0 est le scalaire harmonique; ψ_i sont les fonctions harmoniques arbitraires.

Sous forme scalaire:

$$2G(u_x, u_y, u_z)=4(1-\sigma)\psi_{1,2,3}-\frac{\partial\psi}{\partial x, y, z}, \qquad (4.27a)$$

où $\psi = x\psi_1+y\psi_2+z\psi_3$.

Les contraintes sont déterminées à l'aide des formules (3.2a).

4. Solution de G. Neuber [16, 17]

Sous forme vectorielle:

$$2G\boldsymbol{u} = 4(1-\sigma)\boldsymbol{\psi} - \operatorname{grad} F. \qquad (4.28)$$

En coordonnées rectangulaires
$\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{i}\psi_1+\boldsymbol{j}\psi_2+\boldsymbol{k}\psi_3$ est le vecteur harmonique;
ψ_i sont les fonctions harmoniques arbitraires

$$\nabla^2 F = 2\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+\frac{\partial\psi_2}{\partial y}+\frac{\partial\psi_3}{\partial z}\right). \qquad (4.29)$$

Sous forme scalaire:

$$2G(u_x\ u_y, u_z)=4(1-\sigma)\psi_{1,2,3}-\frac{\partial F}{\partial x, y, z} \qquad (4.28a)$$

compte tenu de la formule (4.29).

5. Solution de L. Galine [18]

$$2G(u_x,\ u_y,\ u_z)=\psi_{1,2,3}+z\frac{\partial\chi}{\partial x,\ y,\ z}, \tag{4.30}$$

où

$$\nabla^2\psi_i=0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial\chi}{\partial z}=\frac{1}{4\sigma-3}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+\frac{\partial\psi_2}{\partial y}+\frac{\partial\psi_3}{\partial z}\right).$$

La solution (4.28) a été utilisée dans les problèmes se rapportant à la concentration des contraintes.

La solution (4.30) est utilisée pour le calcul d'une couche infinie et d'une matrice sur un demi-espace élastique (problème 9.7).

6. Solution de Lamé

$$2G(u_x,\ u_y,\ u_z)=\psi_{1,2,3}+\frac{1}{1-2\sigma}\left(\frac{\partial\chi_{3,1,2}}{\partial y,\ z,\ x}-\frac{\partial\chi_{2,3,1}}{\partial z,\ x,\ y}\right), \tag{4.31}$$

où

$$\nabla^2\psi_i=0, \quad \nabla^2\chi_{1,2,3}=\frac{\partial\psi_{2,3,1}}{\partial z,\ x,\ y}-\frac{\partial\psi_{3,1,2}}{\partial y,\ z,\ x}.$$

Problèmes

4.1. Problème de Lamé pour le cylindre (1852).

Un cylindre de révolution d'hauteur h, de rayon extérieur b et de rayon intérieur a est soumis à des pressions uniformes intérieure p_i et extérieure p_0.

Déterminer les contraintes et les déplacements pour les conditions aux limites suivantes:

a) le cylindre s'appuie sur un plan absolument rigide et lisse;

b) le cylindre est placé entre deux plans rigides et lisses, la distance entre ces plans ne variant pas.

Dans le cas de déformation à axe de symétrie des corps de révolution, les contraintes et les déplacements, comme l'a montré A. Love, § 188, s'expriment à l'aide d'une seule fonction biharmonique $\varphi_3 = \varphi$ (4.25b):

$$\left.\begin{aligned}
&2Gu_r=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial z}; \quad u_\beta=0;\\
&2Gu_z=\left[2(1-\sigma)\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\varphi+\delta;\\
&R_r=\frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\varphi; \quad R_\beta=B_r=B_z=Z_\beta=0;\\
&B_\beta=\frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma\nabla^2-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\right)\varphi;\\
&Z_z=\frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\sigma)\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\varphi;\\
&R_z=Z_r=\frac{\partial}{\partial r}\left[(1-\sigma)\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\varphi,
\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

δ étant une constante arbitraire.

On peut vérifier par substitution que pour un système de contraintes donné deux équations d'équilibre (1.1b) et quatre équations de continuité (3.4b) sont vérifiées si $\nabla^2\nabla^2\varphi = 0$.

Pour trouver la fonction φ il est commode de la définir comme une série de puissance finie de la variable z, dont les coefficients sont des fonctions inconnues de r:

$$\varphi(z, r) = \sum_{k=0}^{4} f_k(r) z^k = f_0(r) + f_1(r) z + f_2(r) z^2 + f_3(r) z^3 + f_4(r) z^4.$$

En reportant cette expression dans l'opérateur biharmonique

$$\nabla^2\nabla^2\varphi = \left(\frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r^3} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + 2 \frac{\partial^4}{\partial r^2 \partial z^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial^3}{\partial r \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right) \varphi = 0$$

et en égalant à zéro les coefficients de mêmes puissances de z, on obtient des équations différentielles permettant de déterminer les fonctions inconnues f_i. Ces équations sont du type eulerien et après intégration donnent des fonctions élémentaires. L'intégration conduit aux formules:

$$f_0(r) = A_0 + B_0 \operatorname{Log} r + C_0 r^2 + D_0 r^2 \operatorname{Log} r +$$
$$+ \frac{1}{4} \left(\frac{9}{4} B_4 + \frac{1}{2} D_2 - \frac{3}{2} A_4 - C_2 \right) r^4 - \frac{1}{8} (3B_4 + 2D_2) r^4 \operatorname{Log} r +$$
$$+ \frac{1}{8} \left(C_4 - \frac{5}{6} D_4 \right) r^6 + \frac{D_4}{8} r^6 \operatorname{Log} r;$$

$$f_1(r) = A_1 + B_1 \operatorname{Log} r + C_1 r^2 + D_1 r^2 \operatorname{Log} r +$$
$$+ \frac{3}{4} \left(\frac{D_3}{2} - C_3 \right) r^4 - \frac{3}{4} D_3 r^4 \operatorname{Log} r;$$

$$f_2(r) = A_2 + B_2 \operatorname{Log} r + C_2 r^2 + D_2 r^2 \operatorname{Log} r +$$
$$+ \frac{3}{2} \left(\frac{D_4}{2} - C_4 \right) r^4 - \frac{3}{2} D_4 r^4 \operatorname{Log} r;$$

$$f_3(r) = A_3 + B_3 \operatorname{Log} r + C_3 r^2 + D_3 r^2 \operatorname{Log} r;$$
$$f_4(r) = A_4 + B_4 \operatorname{Log} r + C_4 r^2 + D_4 r^2 \operatorname{Log} r.$$

Pour les conditions aux limites du point « a », on a:

pour $r = a$ $R_r = -p_i$, $Z_r = 0$;

$r = b$ $R_r = -p_0$, $Z_r = 0$;

$z = 0$ $Z_z = R_z = 0$;

$z = h$ $u_z = 0$.

L'analyse de la fonction φ et des conditions aux limites permet d'aboutir aux conclusions suivantes:

1) la fonction φ dépend des fonctions f_n impaires. Les fonctions paires caractérisent la pression proportionnelle à la première puissance de z;

2) pour que $Z_r = 0$ avec $r = \frac{a}{b}$, les constantes D_1, B_3, C_3 et D_3 doivent s'annuler;

3) la constante A_1 n'exerce aucune influence sur les états de contrainte et de déformation.

Les conditions mentionnées prises en compte, il vient

$$\varphi(z, r) = (B_1 \operatorname{Log} r + C_1 r^2) z + A_3 z^3. \quad \text{(b)}$$

En établissant les expressions pour les contraintes et les déplacements, compte tenu des conditions aux limites, on obtient:

$$B_1 = \frac{p_0 - p_i}{b^2 - a^2} a^2 b^2; \quad C_1 = \frac{(1-\sigma)(p_0 b^2 - p_i a^2)}{2(1+\sigma)(b^2 - a^2)};$$

$$A_3 = -\frac{(2-\sigma)(p_0 b^2 - p_i a^2)}{3(1+\sigma)(b^2 - a^2)}; \quad \delta = -\frac{\sigma(p_0 b^2 - p_i a^2) h}{G(1+\sigma)(b^2 - a^2)}.$$

Les déplacements et les contraintes valent:

$$u_r = -\frac{1}{2G(b^2 - a^2)}\left[\frac{(p_0 - p_i) a^2 b^2}{r} + \frac{(1-\sigma)(p_0 b^2 - p_i a^2)}{1+\sigma} r\right];$$

$$u_z = \frac{\sigma(p_0 b^2 - p_i a^2)}{G(1+\sigma)(b^2 - a^2)}(z - h);$$

$$R_r = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{p_0 - p_i}{r^2} - \frac{p_0 b^2 - p_i a^2}{b^2 - a^2};$$

$$B_\beta = -\frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{p_0 - p_i}{r^2} - \frac{p_0 b^2 - p_i a^2}{b^2 - a^2};$$

$$Z_z = R_z = 0.$$

Pour les conditions aux limites du point « b » il est commode de prendre pour hauteur du cylindre la grandeur $2h$, tandis que la

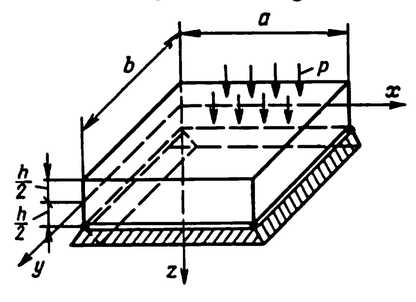


Fig. 21

fonction φ est définie par l'équation (b). Les valeurs obtenues doivent coïncider avec les résultats de la solution du problème (6.1) pour $u_z = Z_r = 0$ et $Z_z = \sigma(R_r + B_\beta)$.

4.2. Déterminer l'état de contrainte dans un panneau rectangulaire limité par les plans $z = \pm h/2$, $x = 0$, $y = 0$, $x = a$ et $y = b$, à appui libre sur les côtés et soumis à une charge normale p uniformément distribuée (fig. 21).

Pour résoudre ce problème prenons une fonction biharmonique $\varphi_3 = \varphi$.

Dans ce cas (4.25a) les déplacements et les contraintes sont:

$$\left.\begin{aligned}
&2Gu_x = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z}, \quad 2Gu_y = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z},\\
&2Gu_z = \left[2(1-\sigma)\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\varphi;\\
&X_x = \frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varphi, \quad X_y = -\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\,\partial y\,\partial z},\\
&Y_y = \frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi, \quad Y_z = \frac{\partial}{\partial y}\left[(1-\sigma)\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\varphi;\\
&Z_z = \frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\sigma)\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\varphi;\\
&Z_x = \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-\sigma)\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\varphi,
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

où

$$\nabla^2(\ldots) = \frac{\partial^2\ldots}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\ldots}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\ldots}{\partial z^2}.$$

Les conditions aux limites du problème s'expriment ainsi:

$$\begin{aligned}
&\text{pour } z = -h/2 && Z_z = -p, \; X_z = Y_z = 0;\\
&z = h/2 && Z_z = Y_z = X_z = 0;\\
&x = 0 \text{ et } x = a && X_x = u_z = 0;\\
&y = 0 \text{ et } y = b && Y_y = u_z = 0. \qquad \text{(b)}
\end{aligned}$$

La fonction biharmonique satisfaisant aux conditions aux limites (b) en x et y, selon les formules (4.2a″) et (4.4) prend la forme:

$$\varphi = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_{mn}\,\mathrm{sh}\left(\pi z\sqrt{m^2/a^2+n^2/b^2}\right) + \right.$$
$$+ B_{mn}\,\mathrm{ch}\left(\pi z\sqrt{m^2/a^2+n^2/b^2}\right) + C_{mn}z\,\mathrm{ch}\left(\pi z\sqrt{m^2/a^2+n^2/b^2}\right) +$$
$$\left.+ D_{mn}z\,\mathrm{sh}\left(\pi z\sqrt{m^2/a^2+n^2/b^2}\right)\right]\sin m\pi x/a \sin n\pi y/b.$$

La charge p répartie sur le panneau se développe également en une double série suivant la formule

$$p = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\sin m\pi x/a \sin n\pi y/b,$$

où

$$a_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b p\sin m\pi x/a\sin n\pi y/b\,dx\,dy.$$

Pour déterminer les constantes arbitraires A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}, on utilise quatre conditions aux limites en z de (b):

pour $z=-h/2$ $Z_z=-p$, X_z ou $Y_z=0$;

$z=h/2$ $Z_z=0$, X_z ou $Y_z=0$ [voir formule (a)].

Les études du travail des panneaux épais ont abouti à la conclusion suivante: la théorie des techniques de calcul des panneaux minces [4] se basant sur l'hypothèse que $e_{zz}=e_{yz}=e_{xz}=0$ et

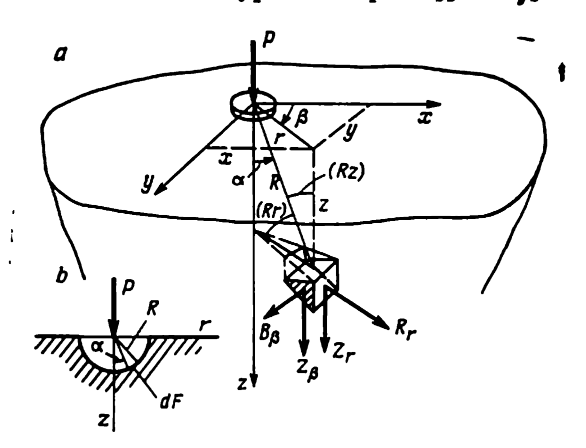


Fig. 22

$Z_z=0$ (d'où X_x, Y_y et $X_y=Y_x$ varient suivant la loi linéaire), permet de simplifier la solution également pour les panneaux avec un rapport de la plus petite dimension a ou b à l'épaisseur h égal à trois et plus, et d'obtenir des résultats très proches des valeurs exactes.

4.3. Problème de Boussinesq (1885) [4].

Sur un demi-espace $z\geqslant 0$ élastique, normalement au plan limite $z=0$, agit une force P (fig. 22,a).

Déterminer les déplacements et les contraintes.

Le problème est étudié comme un problème à axe de symétrie en coordonnées cylindriques avec une singularité logarithmique à l'origine des coordonnées qui est le point d'application de la force. Pour déterminer les déplacements et les contraintes, on utilise pour les calculs les formules théoriques (a) du problème 4.1.

Si les contraintes sont définies d'après les formules (a) du problème 4.1, elles satisfont aux équations d'équilibre (1.1b)

$$\frac{\partial R_r}{\partial r}+\frac{\partial R_z}{\partial z}+\frac{R_r-B_\beta}{r}=0, \quad \frac{\partial Z_r}{\partial r}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}+\frac{Z_r}{r}=0;$$

ainsi qu'aux conditions de Beltrami-Mitchell (3.4b):

$$\nabla^2 R_r-\frac{2}{r^2}(R_r-B_\beta)+\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial r^2}=0,$$

$$\nabla^2 B_\beta+\frac{2}{r^2}(R_r-B_\beta)+\frac{1}{1+\sigma}\frac{1}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial r}=0,$$

$$\nabla^2 Z_z+\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}=0,$$

$$\nabla^2 Z_r-\frac{Z_r}{r^2}+\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial r\,\partial z}=0,$$

si la fonction φ est biharmonique, c'est-à-dire si (4.1b),

$$\nabla^2\nabla^2\varphi=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)=0.$$

On résout le problème en introduisant la fonction biharmonique

$$\varphi=\varphi_3=\frac{P}{2\pi}\{R+(1-2\sigma)[z\,\mathrm{Log}(R+z)-R]\},$$

où

$$R=\sqrt{r^2+z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

En tenant compte de ce que

$$\frac{\partial R}{\partial r}=\frac{r}{R}, \quad \frac{\partial R}{\partial z}=\frac{z}{R}, \quad R-z=\frac{r^2}{R+z},$$

$$\nabla^2 R=\frac{2}{R}, \quad \nabla^2[z\,\mathrm{Log}(R+z)-R]=0,$$

il vient:

$$u_r=\frac{P}{4\pi G}\cdot\frac{r}{R^2}\left[\frac{(1-2\sigma)R}{R+z}-\frac{z}{R}\right],$$

$$u_z=\frac{P}{4\pi GR}\left[2(1-\sigma)+\frac{z^2}{R^2}\right],$$

$$R_r=\frac{P}{2\pi R^2}\left[\frac{(1-2\sigma)R}{R-z}-\frac{3r^2z}{R^3}\right],$$

$$B_\beta=-\frac{(1-2\sigma)P}{3\pi R^2}\left(\frac{R}{R+z}-\frac{z}{R}\right),$$

$$Z_z=-\frac{3P}{2\pi R^2}\cdot\frac{z^3}{R^3},$$

$$R_z=Z_r=-\frac{3P}{2\pi R^2}\cdot\frac{rz^2}{R^3},$$

$$R_\beta=B_r=B_z=Z_\beta=u_\beta=0.$$

Pour $R\to\infty$ tous les déplacements et toutes les contraintes tendent vers zéro.

Pour $z = 0$ et $R = r$, on obtient le déplacement du plan limite:

$$u_r = -(1 - 2\sigma)\, P/(4\pi G r) = -(1+\sigma)(1-2\sigma)\, P/(2\pi E r),$$

$$u_z = (1-\sigma)\, P/(2\pi G r) = (1-\sigma^2)\, P/(\pi E r).$$

Le plan limite $z = 0$ est libéré de contraintes ($Z_z = R_z = 0$), le point $R = 0$ excepté, où les contraintes croissent infiniment. Cette dernière circonstance s'explique par l'existence d'une force ponctuelle P appliquée à l'origine des coordonnées et peut être explicitée par les calculs suivants.

Découpons à l'origine des coordonnées dans le demi-espace une demi-sphère de rayon R; quand R est petit (fig. 22,*b*) la charge des forces s'exprime en contraintes suivant des éléments de surface inclinés.

La projection du vecteur principal de ces forces sur l'axe z est différente de zéro et est égale à

$$Z = \iint_F [Z_r \cos(Rr) + Z_z \cos(Rz)]\, dF = \mid \cos(Rr) = -\sin\alpha = -r/R,$$

$$\cos(Rz) = -\cos\alpha = -z/R,$$

$$dF = r\, d\beta \cdot R\, d\alpha \mid = \frac{3P}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{rz^2}{R^5}\sin\alpha + \frac{z^3}{R^5}\cos\alpha\right) rR\, d\alpha =$$

$$= 3P\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha\cos^2\alpha\, d\alpha = P.$$

Donnons les valeurs des déplacements et des contraintes en coordonnées rectangulaires x, y, z (voir fig. 22,*a*)

$$u_x = \frac{P}{4\pi}\left[\frac{zx}{GR^3} - \frac{x}{(\lambda+G)\, R\,(z+R)}\right],$$

$$u_y = \frac{P}{4\pi}\left[\frac{zy}{GR^3} - \frac{y}{(\lambda+G)\, R\,(z+R)}\right],$$

$$u_z = \frac{P}{4\pi}\left[\frac{z^2}{GR^3} + \frac{\lambda+2\mu}{G(\lambda+G)\, R}\right];$$

$$X_x = -\frac{P}{2\pi}\left\{\left[\frac{3x^2z}{R^5} - \frac{Gz}{(\lambda+G)\, R^3}\right] - \frac{G}{\lambda+G}\left[\frac{y^2+z^2}{R^3(R+z)} - \frac{x^2}{R^2(R+z)^2}\right]\right\},$$

$$Y_y = -\frac{P}{2\pi}\left\{\left[\frac{3y^2z}{R^5} - \frac{Gz}{(\lambda+G)\, R^3}\right] - \frac{G}{\lambda+G}\left[\frac{x^2+z^2}{R^3(R+z)} - \frac{y^2}{R^2(R+z)^2}\right]\right\},$$

$$Z_z = -\frac{P}{2\pi}\left\{\left[\frac{3z^3}{R^5} + \frac{Gz}{(\lambda+G)\, R^3}\right] - \frac{G}{\lambda+G}\,\frac{z}{R^3}\right\},$$

$$X_y = -\frac{P}{2\pi}\left\{\frac{3xyz}{R^5} - \frac{Gxy\,(z+2R)}{(\lambda+G)\, R^3(R+z)^2}\right\},$$

$$Y_z = -\frac{P}{2\pi}\left\{\left[\frac{3yz^2}{R^5} + \frac{Gy}{(\lambda+G)\, R^3}\right] - \frac{G}{\lambda+G}\,\frac{y}{R^3}\right\},$$

$$Z_x = -\frac{P}{2\pi}\left\{\left[\frac{3xz^2}{R^5} + \frac{Gx}{(\lambda+G)\, R^3}\right] - \frac{G}{\lambda+G}\,\frac{x}{R^3}\right\}.$$

4.4. Problème de Kelvin (1848) [4].

La force P est appliquée à un point d'un corps infiniment grand suivant l'axe z (fig. 23).

Déterminer les déplacements et les contraintes.

L'origine des coordonnées est choisie au point d'application de la force que l'on entoure d'une petite région sphérique. Le problè-

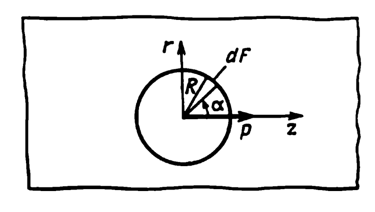


Fig. 23

me se résout en coordonnées rectangulaires par définition d'une fonction biharmonique

$$\varphi = \varphi_3 = AR, \tag{a}$$

où

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

A étant une constante arbitraire.

Selon les formules (a) du problème (4.2), il vient:

$$u_x = \frac{A}{2G} \cdot \frac{xz}{R^3}, \quad u_y = \frac{A}{2G} \cdot \frac{yz}{R^3},$$

$$u_z = \frac{A}{2GR}\left[\frac{z^2}{R^2} + (3 - 4\sigma)\right],$$

$$X_x = \frac{Az}{R^3}\left[(1 - 2\sigma) - \frac{3x^2}{R^2}\right],$$

$$Y_y = \frac{Az}{R^3}\left[(1 - 2\sigma) - \frac{3y^2}{R^2}\right],$$

$$Z_z = -\frac{Az}{R^3}\left[(1 - 2\sigma) + \frac{3z^2}{R^2}\right],$$

$$X_y = -\frac{3Axyz}{R^5}, \quad Y_z = -\frac{Ay}{R^3}\left[(1 - 2\sigma) + \frac{3z^2}{R^2}\right],$$

$$Z_x = -\frac{Ax}{R^3}\left[(1 - 2\sigma) + \frac{3z^2}{R^2}\right]. \tag{b}$$

Pour déterminer la constante arbitraire A composons la projection de toutes les forces, situées à la surface de la petite sphère, sur l'axe z (fig. 23)

$$Z = \iint_F [Z_z \cos(R, z) + Z_y \cos(R, y) + Z_x \cos(R, x)]\, dF =$$

$$= | \cos(R, x) = -x/R, \cos(R, y) = -y/R,$$

$$\cos(R,\ z) = -\cos\alpha = -z/R,\quad dF = r\,d\beta\cdot R\,d\alpha \mid =$$

$$= A\int_0^{2\pi} d\beta \int_0^{\pi} [(z^2+y^2+x^2)/R^4]\,[(1-2\sigma)+3z^2/R^2]\,rR\,d\alpha =$$

$$= 2\pi A\int_0^{\pi} \sin\alpha\,[(1-2\sigma)+3\cos^2\alpha]\,d\alpha = 8\pi(1-\sigma)A,$$

d'où

$$A = P/[8\pi(1-\sigma)].$$

Les projections des forces sur les axes x et y sont nulles. En définitive, on obtient:

$$u_x = \frac{(1+\sigma)P}{8\pi E(1-\sigma)}\cdot\frac{xz}{R^3} = \frac{(\lambda+G)P}{8\pi G(\lambda+2G)}\cdot\frac{\partial^2 R}{\partial z\,\partial x},$$

$$u_y = \frac{(1+\sigma)P}{8\pi E(1-\sigma)}\cdot\frac{yz}{R^3} = \frac{(\lambda+G)P}{8\pi G(\lambda+2G)}\cdot\frac{\partial^2 R}{\partial z\,\partial y},$$

$$u_z = \frac{(1+\sigma)P}{8\pi E(1-\sigma)}\cdot\frac{1}{R}\left[\frac{z^2}{R^2}+(3-4\sigma)\right] = \frac{(\lambda+G)P}{8\pi G(\lambda+2G)}\cdot\frac{\partial^2 R}{\partial z^2}+\frac{R}{4\pi GR}.$$

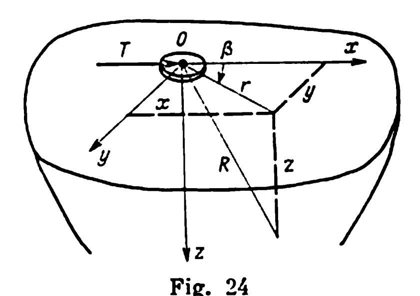


Fig. 24

Les contraintes sont déterminées à l'aide des formules (b):

$$X_x = \frac{Pz}{8\pi(1-\sigma)R^3}\left[(1-2\sigma)-\frac{3x^2}{R^2}\right],$$

$$Y_y = \frac{Pz}{8\pi(1-\sigma)R^3}\left[(1-2\sigma)-\frac{3y^2}{R^2}\right],$$

$$X_y = -\frac{3Pxyz}{8\pi(1-\sigma)R^5},$$

$$Z_z = -\frac{Pz}{8\pi(1-\sigma)R^3}\left[(1-2\sigma)+\frac{3z^2}{R^2}\right],$$

$$Y_z = -\frac{Py}{8\pi(1-\sigma)R^3}\left[(1-2\sigma)+\frac{3z^2}{R^2}\right],$$

$$Z_x = -\frac{Px}{8\pi(1-\sigma)R^3}\left[(1-2\sigma)+\frac{3z^2}{R^2}\right].$$

4.5. Problème de Cerutti (1882) [4].

Sur un demi-espace élastique $z \geqslant 0$ tangentiellement au plan limite $z = 0$ agit une force T (fig. 24).

Déterminer les déplacements et les contraintes.

En posant que la force T est appliquée à l'origine des coordonnées le long de l'axe x, on cherche la solution en introduisant deux fonctions biharmoniques (4.25a)

$$\varphi_1 = \frac{T}{4\pi(1-\sigma)}\{R + 2(1-\sigma)(1-2\sigma)[z\,\mathrm{Log}(R+z) - R]\}$$

$$\text{et} \quad \varphi_3 = \frac{T}{4\pi(1-\sigma)}(1-2\sigma)\,x\,\mathrm{Log}(R+z).$$

Ensuite, selon les formules (4.25a), il vient:

$$u_x = \frac{T}{4\pi G}\left(\frac{\lambda+3G}{\lambda+G} + \frac{x^2}{R^2}\right)\frac{1}{R} - \frac{T}{2\pi(\lambda+G)R} + $$
$$+ \frac{T}{4\pi(\lambda+G)}\left[1 - \frac{x^2}{R(R+z)}\right]\frac{1}{R+z},$$

$$u_y = \frac{T}{4\pi}\cdot\frac{xy}{R}\left[\frac{1}{GR^2} - \frac{1}{(\lambda+G)(R+z)^2}\right],$$

$$u_z = \frac{T}{4\pi}\cdot\frac{x}{R}\left[\frac{z}{GR^2} + \frac{1}{(\lambda+G)(R+z)}\right],$$

au point $O - \iint X_z\,dx\,dy = T$.

Selon les formules (3.2a) les tensions seront égales à:

$$X_x = \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{3x^3}{R^5} + \frac{Gx}{\lambda+G}\left[\frac{3}{R(R+z)^2} - \frac{x^2(3R+z)}{R^3(R+z)^3} - \frac{1}{R^3}\right]\right\},$$

$$Y_y = \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{3xy^2}{R^5} + \frac{Gx}{\lambda+G}\left[\frac{1}{R(R+z)^2} - \frac{y^2(3R+z)}{R^3(R+z)^3} - \frac{1}{R^3}\right]\right\},$$

$$X_y = \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{3x^2y}{R^5} + \frac{Gy}{\lambda+G}\left[\frac{1}{R(R+z)^2} - \frac{x^2(3R+z)}{R^3(R+z)^3}\right]\right\},$$

$$Z_z = \frac{3T}{2\pi}\frac{xz^2}{R^5}, \quad Y_z = \frac{3T}{2\pi}\frac{xyz}{R^5}, \quad Z_x = \frac{3T}{2\pi}\frac{x^2z}{R^5}.$$

4.6. Problème de Myndlin (1936) [19]. Déterminer l'état de contrainte dû à la force P appliquée à l'intérieur d'un demi-espace élastique $z \geqslant 0$ normalement au plan limite $z = 0$ (fig. 25).

Vu que l'état de contrainte est symétrique par rapport à l'axe z, les contraintes et les déplacements se déterminent à l'aide des formules (a) du problème 4.1.

En choisissant la fonction biharmonique φ Myndlin a agi de la façon suivante:

1) il a appliqué la solution de Kelvin (problème 4.4) à la force s'exerçant au point (0, 0, c)

$$A_1R_1 = A_1\sqrt{r^2 + (z-c)^2};$$

2) pour éliminer les contraintes Z_z et R_z sur le plan $z = 0$, obtenues dans la solution de Kelvin, ainsi que pour satisfaire aux conditions

$$\int_0^\infty 2\pi r Z_z dr = -P \text{ pour } z > c$$

il a adjoint au point (0, 0, $-c$) cinq noyaux de déformations:

a) une force le long de l'axe z:

$$AR_2 = A\sqrt{r^2 + (z + c)^2};$$

b) un couple de forces dans la direction de l'axe z:

$$B(z + c)/R_2;$$

c) un centre de compression dans la direction de l'axe z:

$$C \operatorname{Log}(R_2 + z + c);$$

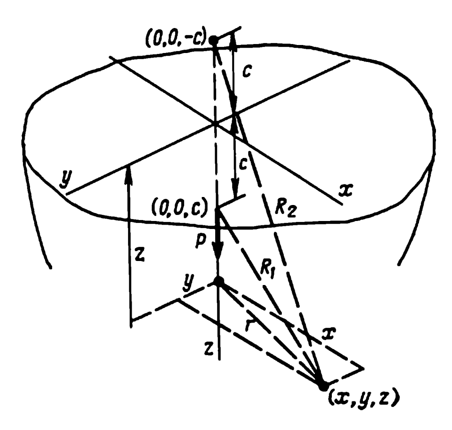


Fig. 25

d) une ligne de compression le long de l'axe z de $z + c = 0$ jusqu'à $z + c = -\infty$:

$$D[(z + c)\operatorname{Log}(R_2 + z + c) - R_2];$$

e) un dipôle (un double centre de compression) d'axe parallèle à l'axe z:

$$F/R_2.$$

On obtient ainsi une fonction biharmonique

$$\varphi = A_1R_1 + AR_2 + \frac{B(z+c)}{R_2} + C\operatorname{Log}(R_2 + z + c) +$$
$$+ D[(z + c)\operatorname{Log}(R_2 + z + c) - R_2] + F/R_2; \qquad \text{(a)}$$

3) après avoir déterminé les contraintes Z_z et R_z d'après les formules du problème 4.1 et satisfait aux trois conditions du point 2, on obtient la valeur de toutes les constantes

$$A_1 = P/[8\pi(1-\sigma)] \text{ (problème 4.4)}, \quad A = (3-4\sigma)A_1,$$
$$B = -2cA_1, \quad C = -4(1-2\sigma)cA_1,$$
$$D = 4(1-\sigma)(1-2\sigma)A_1, \quad F = 2c^2A_1.$$

En reportant les grandeurs obtenues dans la formule (a), on peut obtenir la valeur définitive de la fonction φ:

$$\varphi = \frac{P}{8\pi(1-\sigma)}\Big\{R_1 + [8\sigma(1-\sigma)-1]R_2 - \frac{2cz}{R_2} + $$
$$+ 4(1-2\sigma)[(1-\sigma)z - \sigma c]\,\mathrm{Log}\,(R_2+z+c)\Big\}. \qquad \text{(b)}$$

Si $c \to \infty$, alors tous les termes contenant R_2 disparaissent et on obtient la solution du problème de Kelvin (4.4):

$$\varphi = \frac{PR_1}{8\pi(1-\sigma)}.$$

Si $c \to 0$, on a la solution du problème de Boussinesq (4.3):

$$\varphi = \frac{P}{2\pi}[2\sigma R + (1-2\sigma)z\,\mathrm{Log}\,(R+z)].$$

En utilisant la fonction des contraintes (b) on détermine, à l'aide des formules (a) du problème 4.1, les contraintes.

Par une méthode analogue Myndlin [19] a résolu le problème quand agissait une force ponctuelle au sein du demi-espace élastique à la profondeur c parallèlement au plan limite $z = 0$, les problèmes de Kelvin ($c = \infty$) et de Cerutti ($c = 0$) constituant pour ce problème des cas particuliers.

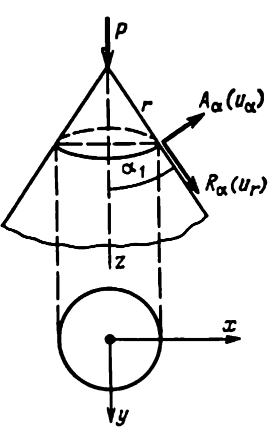
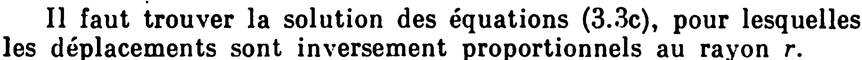


Fig. 26

4.7. Problème de Mitchell (1900) [4].

Trouver la distribution des contraintes dans un cône infini $\alpha = \alpha_1$, au sommet duquel, perpendiculairement à l'axe du cône, agit la force S (fig. 26).



Il faut trouver la solution des équations (3.3c), pour lesquelles les déplacements sont inversement proportionnels au rayon r.

Posons u_r et u_α proportionnels à $\cos n\beta$, tandis que u_β l'est à $\sin n\beta$.

Dans ce cas les déplacements seront égaux à

$$u_r=\frac{\cos n\beta}{r}\left(-\frac{\lambda+2G}{G}\frac{r^2\theta}{\cos n\beta}+C\operatorname{tg}^n\frac{\alpha}{2}+D\operatorname{ctg}^n\frac{\alpha}{2}\right);$$

$$u_\alpha=\frac{\cos n\beta}{r\sin\alpha}\left[-\frac{\lambda+3G}{2G}\sin\alpha\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{r^2\theta}{\cos n\beta}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(C\operatorname{tg}^n\frac{\alpha}{2}+D\operatorname{ctg}^n\frac{\alpha}{2}\right)\cos\alpha+F\operatorname{tg}^n\frac{\alpha}{2}+H\operatorname{ctg}^n\frac{\alpha}{2}\right];$$

$$u_\beta=\frac{\sin n\beta}{r\sin\alpha}\left[n\frac{\lambda+3G}{2G}\frac{r^2\theta}{\cos n\beta}-\left(C\operatorname{tg}^n\frac{\alpha}{2}-D\operatorname{ctg}^n\frac{\alpha}{2}\right)\cos\alpha-\right.$$

$$\left.-F\operatorname{tg}^n\frac{\alpha}{2}+H\operatorname{ctg}^n\frac{\alpha}{2}\right],$$

où

$$\theta=\frac{\cos n\beta}{r^2}\left[A(n+\cos\alpha)\operatorname{tg}^n\frac{\alpha}{2}+B(n-\cos\alpha)\operatorname{ctg}^n\frac{\alpha}{2}\right];$$

A, B, C, D, F, H étant des constantes arbitraires.

Pour $n=0$ ou $n=1$ la solution exige une étude particulière. La résolution du problème s'effectue par combinaison de trois types de solutions

1) $$u_r=\frac{F}{4\pi G}\frac{\sin\alpha\cos\beta}{r};$$

$$u_\alpha=\frac{\lambda+3G}{2(\lambda+2G)}\cdot\frac{F}{4\pi G}\cdot\frac{\cos\alpha\cos\beta}{r};$$

$$u_\beta=-\frac{\lambda+3G}{2(\lambda+2G)}\cdot\frac{F}{4\pi G}\cdot\frac{\sin\beta}{r};$$

$$R_r=-\frac{3\lambda+4G}{\lambda+2G}\cdot\frac{F}{4\pi G}\cdot\frac{\sin\alpha\cos\beta}{r^2};$$

$$A_\alpha=B_\beta=\frac{G}{\lambda+2G}\cdot\frac{F}{4\pi}\cdot\frac{\sin\alpha\cos\beta}{r^2};\quad A_\beta=0;$$

$$B_r=\frac{G}{\lambda+2G}\cdot\frac{F}{4\pi}\cdot\frac{\sin\beta}{r^2};$$

$$A_r=-\frac{G}{\lambda+2G}\cdot\frac{F}{4\pi}\cdot\frac{\cos\alpha\cos\beta}{r^2}.$$

2) $$u_r=0;\quad u_\alpha=-\frac{C}{r}\cdot\frac{\cos\beta}{1+\cos\alpha};$$

$$u_\beta=\frac{C}{r}\cdot\frac{\sin\beta}{1+\cos\alpha};$$

$$R_r=0;\quad A_\alpha=-B_\beta=-\frac{2GC}{r^2}\cdot\frac{(1-\cos\alpha)\cos\beta}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha};$$

$$A_r=\frac{2GC}{r^2}\cdot\frac{(1-\cos\alpha)\sin\beta}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha};\quad B_r=-\frac{2GC}{r^2}\cdot\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};$$

$$R_\alpha=2G\frac{C}{r^2}\cdot\frac{\cos\beta}{1+\cos\alpha}.$$

3) $$u_r = \frac{D}{r} \cdot \frac{\sin\alpha\cos\beta}{1+\cos\alpha}; \quad u_\alpha = \frac{D}{r}\cos\beta; \quad u_\beta = -\frac{D}{r}\sin\beta;$$

$$R_r = -A_\alpha = -2G\frac{D}{r^2} \cdot \frac{\sin\alpha\cos\beta}{1+\cos\alpha}; \quad B_\beta = 0;$$

$$A_\beta = -G\frac{D}{r^2} \cdot \frac{\sin\alpha\sin\beta}{1+\cos\alpha}; \quad B_r = G\frac{D}{r^2}\left(2 - \frac{1}{1+\cos\alpha}\right)\sin\beta;$$

$$R_\alpha = -G\frac{D}{r^2}\left(2 - \frac{1}{1+\cos\alpha}\right)\cos\beta.$$

Les conditions aux limites du problème prennent la forme: pour $\alpha = \alpha_1$ $A_\alpha = R_\alpha = B_\alpha = 0$, d'où trois équations homogènes par rapport à C, D et F. Des équations obtenues on tire:

$$C = -\frac{(1+\cos\alpha_1)^2}{8\pi(\lambda+2G)}F; \quad D = -\frac{1+\cos\alpha_1}{4\pi(\lambda+2G)}F.$$

En formant la somme des projections sur l'axe x de la force S et des contraintes suivant la surface sphérique de centre au sommet du cône, il vient

$$S = \frac{F}{4}\frac{(2+\cos\alpha_1)\lambda+2G}{\lambda+2G}(1-\cos\alpha_1)^2.$$

4.8. Etudier l'état de contrainte au sein d'une lourde sphère de rayon a s'appuyant sur un support horizontal rigide.

Les forces actives sont: le poids spécifique du matériau γ et la réaction du support

$$P = 4\pi a^3\gamma/3,$$

appliquée au pôle inférieur de la sphère ($\alpha = \pi$).

Selon le problème (3.10), la charge superficielle peut être représentée sous la forme

$$\sigma_n = (-1)^n\frac{2n+1}{2} \cdot \frac{P}{2\pi a^2} = (-1)^{n-1}\frac{2n+1}{3}\gamma a,$$

et, en particulier,

$$\sigma_0 = -\frac{1}{3}\gamma a, \quad \sigma_1 = \gamma a. \tag{a}$$

Pour le poids spécifique de potentiel Π l'équation (4.8) prend la forme

$$\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\sigma}\operatorname{grad}\operatorname{div} u = -\frac{P}{G} = \frac{1}{G}\operatorname{grad}\Pi, \tag{b}$$

qui peut être satisfaite en introduisant le potentiel des déplacements

$$u = \frac{1}{G}\operatorname{grad}\chi, \tag{c}$$

qui se définit, comme le montre la substitution de l'expression (c) dans l'équation (b), à partir de l'équation

$$\nabla^2\chi = \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}\Pi. \qquad \text{(d)}$$

Le potentiel du poids spécifique

$$\Pi = \gamma z = \gamma r \cos\alpha = \gamma r P_1(\mu), \qquad \text{(e)}$$

autrement dit est une fonction harmonique.

En adoptant dans le cas général

$$\Pi = \sum \Pi_n = \sum E_n r^n P_n(\mu)$$

et cherchant la solution de l'équation (d) sous la forme

$$\chi = \sum \chi_n = \sum F_n r^2 \Pi_n, \qquad \text{(f)}$$

où F_n sont des constantes inconnues, on obtient

$$\chi_n = \frac{(1-2\sigma)E_n}{4(1-\sigma)(2n+3)} r^{n+2} P_n(\mu) \qquad \text{(g)}$$

et en conformité avec (c)

$$u_r = \frac{1}{G}\cdot\frac{\partial\chi_n}{\partial r} \quad \text{et} \quad u_\alpha = \frac{1}{G}\cdot\frac{\partial\chi_n}{\partial\alpha}. \qquad \text{(h)}$$

Dans le cas considéré, compte tenu de (e), il vient: pour les déplacements

$$u_r = \frac{3(1-2\sigma)\gamma}{20(1-\sigma)G} r^2\cos\alpha; \quad u_\alpha = -\frac{(1-2\sigma)\gamma}{20(1-\sigma)G} r^2 \sin\alpha;$$

pour les contraintes

$$R_r = \frac{3-\sigma}{5(1-\sigma)}\gamma r\cos\alpha; \quad A_r = -\frac{(1-2\sigma)\gamma}{5(1-\sigma)} r\sin\alpha;$$

$$A_\alpha = B_\beta = \frac{1+3\sigma}{5(1-\sigma)}\gamma r\cos\alpha. \qquad \text{(i)}$$

La surface de la sphère $r = a$ partout, à l'exception du pôle $(\alpha = \pi)$, ne doit pas comporter de contraintes. La solution particulière (h) de l'équation doit être ajoutée à sa solution générale [(c) du problème 3.10] en effectuant la sommation sur tous les nombres positifs de $n = 0$ à $n = \infty$:

$$(n+1)(2Ga_n + K\lambda A_n)a^n + 2G_n(n-1)a^{n-2}C_n = (-1)^{n-1}\frac{2n+1}{3}\gamma a;$$

$$G[(a_n + n\bar{\bar{A}}_n) + 2(n-1)a^{-2}C_n] = 0. \qquad \text{(j)}$$

Pour $n = 1$ (solution particulière) les termes du second membre des équations (j) sont respectivement égaux à [(a) + (i)]:

$$\sigma_1 = \gamma a - \frac{3-\sigma}{5(1-\sigma)}\gamma a = \frac{2(1-2\sigma)}{5(1-\sigma)}\gamma a;$$

$$\tau_1 = -\frac{1-2\sigma}{5(1-\sigma)}\gamma a\left(\frac{dP_1}{d\alpha} = -\sin\alpha\right).$$

Une fois les constantes A_n et C_n déterminées, on trouve les contraintes à l'aide des formules (c) du problème 3.10.

4.9. Etudier l'état de contrainte au sein d'une lourde sphère de rayon a tournant à une vitesse angulaire constante ω autour de l'axe z.

Au cours de la rotation de la sphère autour de l'axe z des forces centrifuges apparaissent dont le potentiel est

$$\Pi = -\frac{\gamma\omega^2}{2g}(x^2+y^2).$$

En passant aux coordonnées sphériques suivant les formules

$$x = r\sin\alpha\cos\beta,\quad y = r\sin\alpha\sin\beta$$

et, compte tenu de ce que

$$P_2(\cos\alpha) = P_2(\mu) = (3\mu^2-1)/2$$

(voir ch. 4), il vient

$$\Pi = -\frac{\gamma\omega^2}{3g}r^2 + \frac{\gamma\omega^2}{3g}r^2P_2(\mu). \tag{a}$$

Le premier terme correspond au potentiel ne dépendant que de r:

$$\Pi = \Pi(r),$$

et, par suite, l'équation (d) du problème (4.8) s'écrit:

$$\nabla_r^2\chi = \frac{1}{r^2}\left[\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\chi}{dr}\right)\right] = \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}\Pi(r),$$

d'où par intégration directe, on obtient

$$\chi(r) = \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}\int_0^r\frac{dr}{r^2}\int_0^r r^2\Pi(r)\,dr,$$

soit

$$u_r = \frac{1}{G}\cdot\frac{d\chi}{dr} = \frac{1-2\sigma}{2G(1-\sigma)r^2}\int_0^r r^2\Pi(r)\,dr,$$

$$u_\alpha = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} R_r &= \lambda\theta + 2G\frac{du_r}{dr} = \Pi(r) - \frac{2(1-2\sigma)}{(1-\sigma)r^3}\int_0^r r^2\Pi(r)\,dr,\\ A_\alpha &= B_\beta = \lambda\theta + 2G\frac{u_r}{r} = \frac{\sigma}{1-\sigma}\Pi(r) + \frac{1-2\sigma}{(1-\sigma)r^3}\int_0^r r^2\Pi(r)\,dr,\end{aligned}\right\} \tag{b}$$

$$A_r = 0.$$

Pour que la surface de la sphère ne soit pas soumise avec $r = a$ à des contraintes, il faut à la solution (b) ajouter la solution générale des équations (4.8) sous la forme [problème 3.9, formules (j)]:

$$\left.\begin{aligned} u_r &= 2A_0 (1-2\sigma) r, \quad u_\alpha = 0, \\ R_r &= A_\alpha = B_\beta = 4G(1+\sigma) A_0, \quad A_r = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(c)}$$

avec la valeur A_0 définie d'après la relation

$$\Pi(a) - \frac{2(1-2\sigma)}{(1-\sigma)a^3} \int_0^a r^2 \Pi(r)\, dr + 4G(1+\sigma) A_0 = 0,$$

en conformité avec la première équation de (b).

On obtient

$$A_0 = \frac{1}{4(1+\sigma)G} \left[-\Pi(a) + \frac{2(1-2\sigma)}{(1-\sigma)a^3} \int_0^a r^2\Pi(r)\, dr \right].$$

La somme des solutions (b) et (c) donne:

$$u_r = -\frac{1-2\sigma}{2G(1+\sigma)} \left[\Pi(a) + \frac{2(1-2\sigma)}{(1-\sigma)a^3} \int_0^a r^2\Pi(r)\, dr \right] r +$$

$$+ \frac{1-2\sigma}{2G(1-\sigma)} \frac{1}{r^2} \int_0^r r^2\Pi(r)\, dr, \quad u_\alpha = 0,$$

$$R_r = \Pi(r) - \Pi(a) - \frac{2(1-2\sigma)}{1-\sigma} \left[\frac{1}{r^3} \int_0^r r^2\Pi(r)\, dr - \frac{1}{a^3} \int_0^a r^2\Pi(r)\, dr \right],$$

$$A_r = 0,$$

$$A_\alpha = B_\beta = \frac{\sigma}{1-\sigma} \Pi(r) - \Pi(a) +$$

$$+ \frac{1-2\sigma}{1-\sigma} \left[\frac{1}{r^3} \int_0^r r^2\Pi(r)\, dr + \frac{2}{a^3} \int_0^a r^2\Pi(r)\, dr \right].$$

Compte tenu du premier terme de la formule (a), on obtient en définitive:

$$u_r^{(1)} = \frac{\gamma\omega^2 (1-2\sigma) r}{30Gg(1-\sigma)} \left(\frac{3-\sigma}{1+\sigma} a^2 - r^2 \right), \quad u_\alpha^{(1)} = 0,$$

$$R_r^{(1)} = \frac{\gamma\omega^2}{15g} \cdot \frac{3-\sigma}{1-\sigma} (a^2 - r^2), \quad A_r^{(1)} = 0,$$

$$A_\alpha^{(1)} = B_\beta^{(1)} = \frac{\gamma\omega^2}{15g} \cdot \frac{3-\sigma}{1-\sigma} \left(a^2 - \frac{1-3\sigma}{3-\sigma} r^2 \right).$$

La solution particulière correspondant au second terme de la formule (a) sera écrite sur la base des équations (g) et (h) du problème 4.8 pour $n = 2$ et $E_n = \gamma\omega^2/3g$.

En conformité avec cette solution les contraintes à la surface de la sphère ($r = a$) seront égales:

$$R_r^{(2)} = \frac{\gamma\omega^2 a^2}{21g(1-\sigma)}(6-5\sigma)P_2;\ A_r^{(2)} = \frac{(1-2\sigma)\gamma\omega^2 a^2}{14g(1-\sigma)}\frac{dP_2}{d\alpha}. \qquad \text{(d)}$$

Pour lever les contraintes (d) il faut superposer la solution (c) du problème 3.10 aux deux constantes A_2 et C_2. Les constantes se déterminent des conditions de l'absence de contraintes R_r et A_r quand $r = a$:

$$3(2Ga_2 + K\lambda A_2)a^2 + 4GC_2 = -\frac{\gamma\omega^2 a^2}{21g(1-\sigma)}(6-5\sigma);$$
$$G(a_2 + 2\overline{\overline{A}}_2)a^2 + 2GC_2 = -\frac{(1-2\sigma)\gamma\omega^2 a^2}{14g(1-\sigma)},$$

où

$$a_2 = \frac{3}{7}(2K+1)A_2,\ K = \frac{2G}{\lambda+2G} = \frac{1-2\sigma}{1-\sigma},\ \overline{\overline{A}}_2 = \frac{1}{14}(3K-10)A_2.$$

4.10. On applique à la surface d'un cylindre de révolution de rayon a et de longueur l une charge équilibrée à axe de symétrie de la forme

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} Z_z(r, 0) = f_1(r),\ R_z(r, 0) = f_3(r), \\ Z_z(r, l) = f_2(r),\ R_z(r, l) = f_4(r), \end{array}\right\} 0 \leqslant r \leqslant a \\ R_r(a, z) = f_5(z),\ Z_r(a, z) = f_6(z), \quad 0 \leqslant z \leqslant l, \end{array}\right\} \qquad \text{(a)}$$

où f_i sont des fonctions continues par morceaux, variant de façon limitée dans des intervalles correspondants.

Déterminer la fonction biharmonique φ (voir problème 4.1) qui satisfait aux conditions (a).

Ecrivons la fonction φ sous la forme

$$\varphi(r, z) = z(Ar^2 + Bz^2) + \sum_{k=1}^{\infty}[A_k \operatorname{sh}(\mu_k z) +$$
$$+ B_k \operatorname{ch}(\mu_k z) + C_k\mu_k z \operatorname{sh}(\mu_k z) + D_k\mu_k z \operatorname{ch}(\mu_k z)]J_0(\mu_k r) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty}[E_k I_0(\lambda_k r) + G_k\lambda_k r I_1(\lambda_k r)]\sin(\lambda_k z). \qquad \text{(b)}$$

La fonction (b) satisfait aux conditions (a) au cas où:

1) les grandeurs $\lambda_k = k\pi/l$;

2) les grandeurs μ_k sont les racines de l'équation

$$J_1(\mu_k a) = 0$$

avec la formule asymptotique $\mu_k a = \pi(k + 1/4) + 0(1/k)$;

3) les fonctions $f_1(r) - f_4(r)$ peuvent se représenter dans l'intervalle $0 < r < a$ sous la forme de séries par rapport aux fonctions de Bessel:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(\mu_k r), \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k J_1(\mu_k r);$$

4) les fonctions $f_5(z)$ et $f_6(z)$ peuvent être représentées dans l'intervalle $0 < z < l$ sous la forme de séries de Fourier

$$\frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(\lambda_k z), \quad \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sin(\lambda_k z);$$

5) les coefficients de la formule (b) peuvent être représentés au moyen de a_i, b_i, c_i et d_i en tenant compte des formules (a) du problème 4.1.

CHAPITRE 5

PROBLÈME PLAN EN COORDONNÉES RECTANGULAIRES

I. ÉTAT PLAN DE CONTRAINTE

$$Z_z = Y_z = X_z = e_{zy} + e_{zx} = 0, \; e_{zz} = -\frac{\sigma}{E}(X_x + Y_y).$$

1. Équations d'équilibre

$$\begin{aligned} &\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + X = 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial \tau^2} \right), \\ &\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + Y = 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial \tau^2} \right). \end{aligned} \tag{5.1}$$

2. Équations géométriques

$$\left. \begin{aligned} &e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \; e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \\ &e_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \, \partial y} = 0. \tag{5.3}$$

3. Équations physiques

$$\left.\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E}(X_x - \sigma Y_y), \\ e_{yy} &= \frac{1}{E}(Y_y - \sigma X_x), \\ e_{xy} &= \frac{2(1+\sigma)}{E} X_y; \end{aligned}\right\} \quad (5.4)$$

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \frac{E}{1-\sigma^2}(e_{xx} + \sigma e_{yy}), \\ Y_y &= \frac{E}{1-\sigma^2}(e_{yy} + \sigma e_{xx}), \\ X_y &= Y_x = \frac{E}{2(1+\sigma)} e_{xy}. \end{aligned}\right\} \quad (5.5)$$

4. Équations fondamentales exprimées en fonction des contraintes

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + X = 0, \; \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + Y = 0;$$

$$\nabla^2 (X_x + Y_y) = -2\frac{\lambda+G}{\lambda+2G}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) =$$

$$= -(1+\sigma)\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right). \quad (5.6)$$

5. Équations fondamentales exprimées en fonction des déplacements

$$\left[2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (1-\sigma)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right] u_x + (1+\sigma)\frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{2(1-\sigma^2)}{E} X = 0;$$

$$(1+\sigma)\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \left[2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + (1-\sigma)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] u_y + \frac{2(1-\sigma^2)}{E} Y = 0, \quad (5.7)$$

ou bien en forme de Lamé:

$$\left.\begin{aligned} G\nabla^2 u_x + G\left(\frac{2\lambda}{\lambda+2G} + 1\right)\frac{\partial\theta}{\partial x} + X = 0; \\ G\nabla^2 u_y + G\left(\frac{2\lambda}{\lambda+2G} + 1\right)\frac{\partial\theta}{\partial y} + Y = 0, \end{aligned}\right\} \quad (5.8)$$

où

$$\theta = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \frac{2\lambda}{\lambda+2G} + 1 = \frac{1+\sigma}{1-\sigma}.$$

II. DÉFORMATION PLANE

$$e_{zz} = e_{zx} = e_{zy} = X_z = Y_z = 0, \quad Z_z = \sigma(X_x + Y_y).$$

Au cas d'une déformation plane il faut dans toutes les équations du point I remplacer

$$\sigma \text{ par } \sigma_1 = \frac{\sigma}{1-\sigma}, \text{ et } E \text{ par } E_1 = \frac{E}{1-\sigma^2}. \quad (5.9)$$

Dans ce cas, par exemple, les équations (5.7) deviennent

$$\left[2(1-\sigma)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(1-2\sigma)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]u_x+\frac{\partial^2 u_y}{\partial x\,\partial y}+ \\ +\frac{2(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E}X=0; \\ \frac{\partial^2 u_x}{\partial x\,\partial y}+\left[2(1-\sigma)\frac{\partial^2}{\partial y^2}+(1-2\sigma)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]u_y+\frac{2(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E}Y=0, \quad (5.7a)$$

tandis que les équations (5.8) seront:

$$\left.\begin{aligned} G\nabla^2 u_x+(\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial x}+X=0\left(=\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial\tau^2}\right);\\ G\nabla^2 u_y+(\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial y}+Y=0\left(=\rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial\tau^2}\right).\end{aligned}\right\} \quad (5.8a)$$

Selon les équations (3.3a), il vient

$$(\lambda+2G)\frac{\partial\theta}{\partial x}-2G\frac{\partial\omega}{\partial y}=0;\ (\lambda+2G)\frac{\partial\theta}{\partial y}+2G\frac{\partial\omega}{\partial x}=0, \quad (5.8b)$$

où

$$\lambda = E_1\sigma_1/(1-\sigma_1^2),\quad E_1 = E/(1-\sigma^2),\quad \sigma_1 = \sigma/(1-\sigma),$$

ou

$$\lambda = E\sigma/[(1+\sigma)(1-2\sigma)]$$

(voir les notations du début du livre).

III. SOLUTION DES ÉQUATIONS FONDAMENTALES

1. Résolution utilisant les fonctions contraintes-déplacements

Les équations (5.7) possèdent une solution générale:

$$\left.\begin{aligned} u_x=2\nabla^2\varphi_1-(1+\sigma)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)+ay+b,\\ u_y=2\nabla^2\varphi_2-(1+\sigma)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)-ax+c,\end{aligned}\right\} \quad (5.10)$$

où φ_i sont des fonctions biharmoniques arbitraires;
a, b, c des constantes caractérisant le déplacement du corps solide.

La solution générale des équations (5.7a) prend la forme [voir les équations (4.25a)]:

$$\left.\begin{aligned} u_x=2(1-\sigma)\nabla^2\varphi_1-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)+ay+b,\\ u_y=2(1-\sigma)\nabla^2\varphi_2-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)-ax+c.\end{aligned}\right\} \quad (5.10a)$$

Les équations (5.6) avec l'introduction de la fonction des contraintes $\varphi(x, y)$ (Airy, 1861), au moyen de laquelle les contraintes s'expriment par les formules

$$X_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \; Y_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \; X_y = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial y} - Xy - Yx, \qquad (5.11)$$

où X et Y sont des forces volumiques constantes *), se réduisent à l'équation biharmonique

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \, \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \qquad (5.12)$$

La fonction biharmonique $\varphi(x, y)$ doit satisfaire aux conditions aux limites du problème exprimé en contraintes:

$$\left. \begin{aligned} X_\nu &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial y} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right); \\ Y_\nu &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial y} \cdot \frac{dy}{ds} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot \frac{dx}{ds} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \end{aligned} \right\} \qquad (5.13)$$

ou dans le cas du second problème fondamental, quand sur le contour L sont donnés les déplacements, aux conditions

$$u_x = g_1(s), \quad u_y = g_2(s), \qquad (5.14)$$

où $g_i(s)$ sont les déplacements donnés des points du contour L constituant des fonctions de l'arc s du contour.

2. Utilisation de la variable complexe [20, 21]

Au cas de variables complexes

$$z = x + iy \quad \text{et} \quad \bar{z} = x - iy, \; i = \sqrt{-1} \qquad (5.15)$$

l'équation (5.12) devient

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^2 \, \partial \bar{z}^2} = 0 \qquad (5.16)$$

dont la solution générale est

$$\varphi = \frac{1}{2} [\bar{z} \psi(z) + z \overline{\psi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)}], \qquad (5.17)$$

ou

$$\varphi = \mathrm{Re} [\bar{z} \psi(z) + \chi(z)], \qquad (5.18)$$

où Re est la partie réelle de l'expression entre crochets;
$\psi(z)$ et $\chi(z)$ les fonctions analytiques inconnues de la variable complexe z;
$\overline{\psi(z)}$ et $\overline{\chi(z)}$ les fonctions conjuguées de $\psi(z)$ et de $\chi(z)$.

*) Les formules (5.11) s'étendent également au cas de présence de forces volumiques variables munies d'un potentiel.

Les conditions aux limites (5.13) du premier problème fondamental sur le contour L ont l'aspect

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\psi(z)+z\overline{\psi'(z)}+\overline{\chi'(z)}=$$
$$=i\int_0^s(X_\nu+iY_\nu)\,ds+C=f_1+if_2+\text{const.} \qquad (5.19)$$

Pour le second problème fondamental les conditions (5.14) sur le contour L seront

$$2G(u_x+iu_y)=\varkappa\psi(z)-\overline{z\psi'(z)}-\overline{\chi'(z)}=2G(g_1+ig_2), \qquad (5.20)$$

où $\varkappa=\frac{3-\sigma}{1+\sigma}$, pour l'état plan des contraintes;
$\varkappa=3-4\sigma$, pour la déformation plane.

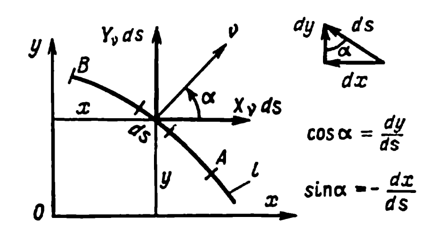


Fig. 27

Les composantes des contraintes se déterminent à l'aide des formules de Kolossov-Mouschelichvili:

$$\left.\begin{aligned}X_x+Y_y&=2[\psi'(z)+\overline{\psi'(z)}]=4\,\mathrm{Re}\,\psi'(z);\\ Y_y-X_x+2iX_y&=2[\bar{z}\psi''(z)+\chi''(z)].\end{aligned}\right\} \qquad (5.21)$$

Les composantes de la résultante agissant suivant l'arc limite AB (fig. 27) sont égales (5.13) à:

$$\left.\begin{aligned}F_x&=\int_A^B X_\nu\,ds=\int_A^B\frac{d}{ds}\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)ds=\left[\frac{d\varphi}{dy}\right]_A^B,\\ F_y&=\int_A^B Y_\nu\,ds=-\int_A^B\frac{d}{ds}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)ds=-\left[\frac{d\varphi}{dx}\right]_A^B.\end{aligned}\right\} \qquad (5.22)$$

Le moment des forces agissant suivant l'arc AB par rapport à l'origine des coordonnées O est:

$$M=-\int_A^B(xY_\nu-yX_\nu)\,dx=-\int_A^B\left[xd\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)+yd\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\right]=$$
$$=-\left[x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]_A^B+[\varphi]_A^B. \qquad (5.23)$$

Pour le plan les équations (3.3a) deviennent:

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+2G)\,\frac{\partial\theta}{\partial x}-2G\,\frac{\partial\omega}{\partial y}=0\,,\\(\lambda+2G)\,\frac{\partial\theta}{\partial y}+2G\,\frac{\partial\omega}{\partial x}=0\,,\end{aligned}\right\}\qquad(5.24)$$

d'où il s'ensuit que θ et ω sont des fonctions harmoniques conjuguées de deux variables, à savoir:

$$(\lambda+2G)\,\theta+2iG\omega=f\,(x+iy)\qquad(5.25)$$

(voir monographie [4]), p. 216).

Pour le plan les équations (3.3a') deviennent:

$$G\nabla^2u_x+(\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial x}=0,\; G\nabla^2u_y+(\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial y}=0\,,\qquad(5.24')$$

soit

$$\nabla^2(u_x+iu_y)+\frac{\lambda+G}{G}\,\frac{\partial\theta}{\partial \bar{z}}=0\,,\qquad(5.25')$$

où

$$\theta=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=2\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial}{\partial z}\,(u_x+iu_y),$$

$$\nabla^2\;\ldots=\frac{\partial^2\;\ldots}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\;\ldots}{\partial y^2}=4\,\frac{\partial^2\;\ldots}{\partial z\,\partial\bar{z}}\,.$$

3. Solution par la méthode des fonctions initiales

Le problème plan se résout par une méthode combinée: en qualité de variables inconnues sont prises les déplacements u_x, u_y et les tensions X_y, Y_y. Les grandeurs cherchées sont représentées

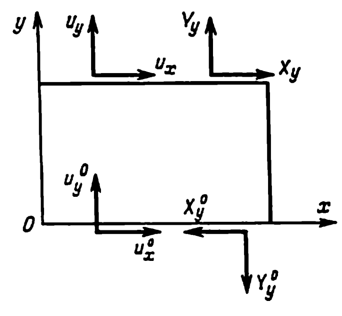


Fig. 28

sous la forme de séries de Maclaurin en puissances de la coordonnée y et sont exprimées par l'intermédiaire des fonctions initiales u_x^0, u_y^0, X_y^0 et Y_y^0, c'est-à-dire les valeurs des fonctions pour $y=0$ (fig. 28).

Tableau 4.1

Fonction	Valeurs des opérateurs différentiels linéaires des fonctions initiales			
	U^0	V^0	Y^0	X^0
U	$L_{UU}=\cos\alpha y-\frac{\alpha y}{2(1-\sigma)}\sin\alpha y$	$L_{UV}=-\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}\sin\alpha y-\frac{\alpha y}{2(1-\sigma)}\cos\alpha y$	$L_{UY}=-\frac{y}{4(1-\sigma)}\sin\alpha y$	$L_{UX}=\frac{1}{\alpha}\sin\alpha y-\frac{\sin\alpha y-\alpha y\cos\alpha y}{4(1-\sigma)\alpha}$
V	$L_{VU}=\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}\sin\alpha y-\frac{\alpha y}{2(1-\sigma)}\cos\alpha y$	$L_{VV}=\cos\alpha y+\frac{\alpha y}{2(1-\sigma)}\sin\alpha y$	$L_{VY}=\frac{3-4\sigma}{4(1-\sigma)\alpha}\sin\alpha y-\frac{y}{4(1-\sigma)}\cos\alpha y$	●
Y	$L_{YU}=\frac{\alpha^2 y}{1-\sigma}\sin\alpha y$	$L_{YV}=-\frac{\alpha}{1-\sigma}(\sin\alpha y-\alpha y\cos\alpha y)$	●	●
X	$L_{XU}=-\frac{\alpha}{1-\sigma}(\sin\alpha y+\alpha y\cos\alpha y)$	●	●	●
X_x	$L_U=\frac{2\alpha}{1-\sigma}\cos\alpha y-\frac{y\alpha^2}{1-\sigma}\sin\alpha y$	$L_V=-\frac{\alpha}{1-\sigma}(\sin\alpha y-y\alpha\cos\alpha y)$	$L_Y=\frac{\sigma}{1-\sigma}\cos\alpha y-\frac{y\alpha}{2(1-\sigma)}\sin\alpha y$	$L_X=\frac{y\alpha}{2(1-\sigma)}\cos\alpha y+\frac{3-2\sigma}{2(1-\sigma)}\sin\alpha y$

Dans le cas d'une déformation plane le système de calcul d'équations prend la forme:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}=0,\ \frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}=0; \\ &Y_y=\frac{2G}{1-2\sigma}\left[(1-\sigma)\frac{\partial u_y}{\partial y}+\sigma\frac{\partial u_x}{\partial x}\right]; \\ &X_y=Y_x=G\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (5.26)$$

En introduisant à des fins de simplification de l'écriture les notations

$$U=Gu_x,\ V=Gu_y,\ Y_y=Y,\ X_y=X,\ \frac{\partial}{\partial x}=\alpha,\ \frac{\partial}{\partial y}=\beta, \qquad (5.27)$$

on transforme les équations (5.26) en la forme:

$$\left.\begin{aligned} &\beta U=-\alpha V+X,\ \beta V=-\frac{\sigma}{1-\sigma}\alpha U+\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}Y, \\ &\beta Y=-\alpha X,\ \beta X=-\frac{2}{1-\sigma}\alpha^2 U-\frac{\sigma}{1-\sigma}\alpha Y. \end{aligned}\right\} \qquad (5.28)$$

Les contraintes X_x se déterminent à l'aide de la formule

$$X_x=\frac{2}{1-2\sigma}[(1-\sigma)\alpha U+\sigma\beta V].$$

Les solutions des équations (5.28) sont obtenues sous la forme:

$$\begin{aligned} U &= L_{UU}U^0+L_{UV}V^0+L_{UY}Y^0+L_{UX}X^0; \\ V &= L_{VU}U^0+L_{VV}V^0+L_{VY}Y^0+L_{VX}X^0; \\ Y &= L_{YU}U^0+L_{YV}V^0+L_{YY}Y^0+L_{YX}X^0; \\ X &= L_{XU}U^0+L_{XV}V^0+L_{XY}Y^0+L_{XX}X^0, \end{aligned} \qquad (5.29)$$

où par la lettre L sont désignés les opérateurs différentiels linéaires qui, sous forme transcendante de la méthode opérationnelle, sont donnés au tableau 4.1.

Pour passer de la forme symbolique à une représentation réelle sous forme de séries infinies, il faut développer les fonctions trigonométriques en séries de puissances αy et remplacer α par $\frac{\partial}{\partial x}$.

Pour un état plan de contrainte E et σ doivent être remplacés respectivement par

$$E\,(1+2\sigma)/[(1+\sigma)^2] \text{ et } \sigma/(1+\sigma).$$

4. Utilisation des solutions homogènes limites [22, 23, 24]

En posant dans les équations homogènes (5.7)

$$\left.\begin{aligned} &u_x=(1+\sigma)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+ay+b; \\ &u_y=-\left[2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(1-\sigma)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\varphi-ax+c, \end{aligned}\right\} \qquad (5.30)$$

on satisfait identiquement à la première équation, tandis que la seconde prend la forme:

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=0. \tag{5.31}$$

En adoptant

$$\varphi=\varphi(y)_{\cos}^{\sin}kx,$$

il vient

$$\varphi=(A_k\operatorname{ch}ky+B_k\operatorname{sh}ky+C_k\,y\operatorname{ch}ky+D_k\,y\operatorname{sh}ky)_{\cos}^{\sin}kx. \tag{5.32}$$

D'où, quand $\sigma=0$:

$$\left.\begin{aligned}
u_x&=\pm k\,]A_kk\operatorname{sh}ky+B_kk\operatorname{ch}ky+C_k(\operatorname{ch}ky+ky\operatorname{sh}ky)+\\
&\quad+D_k(\operatorname{sh}ky+ky\operatorname{ch}ky)]_{\sin}^{\cos}kx+ay+b;\\
u_y&=k\,[A_kk\operatorname{ch}ky+B_kk\operatorname{sh}ky+C_k(ky\operatorname{ch}ky-\\
&\quad-2\operatorname{sh}ky)+D_k(ky\operatorname{sh}ky-2\operatorname{ch}ky)]_{\cos}^{\sin}kx-ax+c;\\
X_x&=-Ek^2\,[A_kk\operatorname{sh}ky+B_kk\operatorname{ch}ky+C_k(\operatorname{ch}ky+ky\operatorname{sh}ky)+\\
&\quad+D_k(\operatorname{sh}ky+ky\operatorname{ch}ky)]_{\cos}^{\sin}kx;\\
Y_y&=Ek^2\,[A_kk\operatorname{sh}ky+B_kk\operatorname{ch}ky+C_k(ky\operatorname{sh}ky-\operatorname{ch}ky)+\\
&\quad+D_k(ky\operatorname{ch}ky-\operatorname{sh}ky)]_{\cos}^{\sin}kx;
\end{aligned}\right\} \tag{5.33}$$

$$X_y=Y_x=\pm Ek^2\,[A_kk\operatorname{ch}ky+B_kk\operatorname{sh}ky+C_kky\operatorname{ch}ky+$$
$$+D_kky\operatorname{sh}ky]_{\sin}^{\cos}kx.$$

Si pour $y=\pm h$ $Y_y=X_y=0$, alors, en égalant à zéro le déterminant des conditions aux limites, il vient

$$4\lambda^2-\operatorname{sh}^2 2\lambda=(2\lambda+\operatorname{sh}2\lambda)(2\lambda-\operatorname{sh}2\lambda)=0, \tag{5.34}$$

où $\lambda=kh$.

Pour $\lambda=a\pm bi$, on obtient deux équations déterminantes:

$$\frac{2a}{\operatorname{sh}2a}=\pm\cos 2b,\quad \frac{2b}{\sin 2b}=\pm\operatorname{ch}2a$$

ou, pour la valeur de

$$b=\frac{1}{2}\operatorname{cth}2a\sqrt{\operatorname{sh}^2 2a-4a^2}, \tag{5.35}$$

$$\frac{2a}{\operatorname{sh}2a}=\pm\cos\left(\operatorname{cth}2a\sqrt{\operatorname{sh}^2 2a-4a^2}\right). \tag{5.36}$$

Le graphique de l'équation (5.36) est donné à la figure 29. En prenant $2n$ valeurs de a (b), on peut satisfaire de façon approchée aux conditions aux limites sur les côtés $x=c_1$ et $x=c_2$ en n points.

Pour satisfaire plus exactement aux conditions aux limites on doit développer la solution particulière de la charge suivant les fonctions

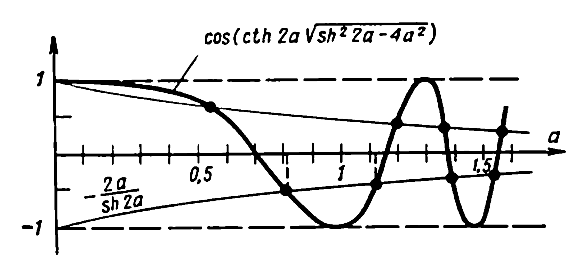


Fig. 29

non orthogonales des solutions homogènes dépendant des racines des équations (5.34) (voir problème 5.9).

5. Solution en différences finies [25]

En utilisant un réseau orthogonal (fig. 30,*a*), on obtient les différences successives $\Delta^n \varphi_k$ suivant les formules:

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \approx \frac{\Delta_x \varphi_k}{2\Delta x} = \frac{\varphi_l - \varphi_i}{2\Delta x}, \quad \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2} \approx \frac{\Delta_x^2 \varphi_k}{\Delta x^2} = \frac{\varphi_h - 2\varphi_k + \varphi_i}{\Delta x^2};$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \approx \frac{\Delta_y \varphi_k}{2\Delta y} = \frac{\varphi_m - \varphi_n}{2\Delta y}, \quad \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y^2} \approx \frac{\Delta_y^2 \varphi_k}{\Delta y^2} = \frac{\varphi_m - 2\varphi_k + \varphi_n}{\Delta y^2};$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x\, \partial y} \approx \frac{\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\varphi_l - \varphi_i}{2\Delta x}\right)}{\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\varphi_m - \varphi_n}{2\Delta y}\right)} = \frac{\varphi_p - \varphi_r - \varphi_0 + \varphi_q}{4\Delta x\, \Delta y}; \tag{5.37}$$

$$\frac{\partial^4 \varphi_k}{\partial x^4} \approx \frac{\Delta_x^4 \varphi_k}{\Delta x^4} = \frac{6\varphi_k - 4\varphi_e - 4\varphi_i + \varphi_t + \varphi_s}{\Delta x^4};$$

$$\frac{\partial^4 \varphi_k}{\partial y^4} \approx \frac{\Delta_y^4 \varphi_k}{\Delta y^4} = \frac{6\varphi_k - 4\varphi_m - 4\varphi_n + \varphi_o + \varphi_u}{\Delta y^4};$$

$$\frac{\partial^4 \varphi_k}{\partial x^2\, \partial y^2} \approx \frac{4\varphi_k - 2\varphi_m - 2\varphi_n - 2\varphi_e - 2\varphi_i + \varphi_p + \varphi_q + \varphi_r + \varphi_0}{\Delta x^2\, \Delta y^2},$$

où φ_k est la valeur de la fonction au point k.

Dans ce cas l'équation harmonique (4.21)

$$\nabla^2 \psi_k = 0$$

prend la forme d'une équation algébrique à cinq termes :

$$\alpha(\psi_l + \psi_i) + \psi_m + \psi_n - 2(1 + \alpha)\psi_k = 0. \tag{5.38}$$

L'équation biharmonique (5.12)

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi_k = 0$$

prend la forme d'une équation algébrique à treize termes:

$$[6(\alpha + 1/\alpha) + 8]\,\varphi_k - 4\,[(1+\alpha)(\varphi_l + \varphi_i) + (1 + 1/\alpha)(\varphi_m + \varphi_n)] + 2\,(\varphi_p + \varphi_q + \varphi_r + \varphi_o) + \alpha\,(\varphi_t + \varphi_s) + \frac{1}{\alpha}\,(\varphi_v + \varphi_u) = 0, \qquad (5.39)$$

où

$$\alpha = (\Delta y/\Delta x)^2 \text{ et } 1/\alpha = (\Delta x/\Delta y)^2.$$

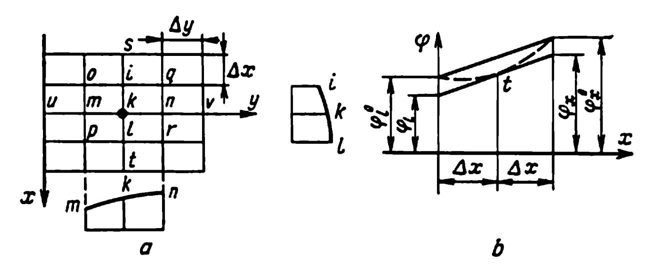


Fig. 30

Pour un quadrillage $\Delta x = \Delta y = h$, $a = 1$ et l'équation (5.39) devient

$$h^4\nabla^2\nabla^2\varphi_k = 20\varphi_k - 8\,(\varphi_l + \varphi_i + \varphi_m + \varphi_n) + 2\,(\varphi_p + \varphi_q + \varphi_r + \varphi_o) + \varphi_t + \varphi_s + \varphi_v + \varphi_u = 0. \qquad (5.39')$$

L'équation harmonique $\nabla^2\psi_k = 0$ prend la forme

$$h^2\nabla^2\psi_k = \psi_m + \psi_i + \psi_n + \psi_l - 4\psi_k = 0. \qquad (5.38')$$

Les contraintes au point k se déterminent selon les formules:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \frac{\partial^2\varphi_k}{\partial y^2} \approx \frac{\varphi_m - 2\varphi_k + \varphi_n}{\Delta y^2}, \\ Y_y &= \frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x^2} \approx \frac{\varphi_l - 2\varphi_k + \varphi_i}{\Delta x^2}, \\ X_y = Y_x &= -\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x\,\partial y} \approx \frac{(\varphi_o + \varphi_r) - (\varphi_p + \varphi_q)}{4\Delta x\,\Delta y}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.40)$$

Avec l'établissement des équations pour des nœuds voisins du contour (m, n, o, etc.; voir fig. 30, a), il faut fixer les valeurs de la fonction φ pour les nœuds du contour et les nœuds voisins au-delà du contour.

Les valeurs de la fonction φ aux nœuds du contour se déterminent selon les formules d'extrapolation:

$$\varphi_x = \varphi_l + 2\Delta x\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_t; \quad \varphi_y = \varphi_n + 2\Delta y\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_v \qquad (5.41)$$

(voir fig. 30, b).

Problèmes

5.1. Un parallélépipède rectangle de grande longueur ($u_z = 0$ correspond à une déformation plane) est soumis à l'action d'une

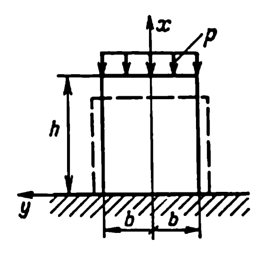


Fig. 31

pression uniforme $-p$ et s'appuie sur un support parfaitement élastique ($u_x = 0$) et lisse ($Y_x = 0$) (fig. 31).

Déterminer les états de contrainte et de déformation.

La solution des équations homogènes (5.7a) sera prise sous la forme (5.10a), en posant $\varphi_1 = 0$ et $\varphi_2 = \varphi$:

$$u_x = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} + ay + b,$$

$$u_y = \left[2(1-\sigma)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (1-2\sigma)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\varphi - ax + c.$$

Les contraintes seront déterminées d'après les formules:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \frac{E_1}{1-\sigma_1^2}(e_{xx}+\sigma_1 e_{yy}) = \frac{E(1-\sigma)}{1+\sigma}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\sigma}{1-\sigma}\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\varphi;\\ Y_y &= \frac{E_1}{1-\sigma_1^2}(e_{yy}+\sigma_1 e_{xx}) = \frac{E(1-\sigma)}{1+\sigma}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{2-\sigma}{1-\sigma}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\varphi;\\ X_y &= Y_x = \frac{E_1}{2(1+\sigma_1)}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) = \frac{E}{1+\sigma}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-\sigma)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \right.\\ &\left. -\sigma\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\varphi. \end{aligned}\right\} \quad \text{(a)}$$

Ecrivons la fonction φ sous la forme d'un polynôme du 3-ème degré:

$$\varphi = Ax^2y + By^3, \tag{b}$$

où A et B sont des coefficients inconnus.

En conformité avec (a) et (b) déterminons les déplacements et les contraintes d'après les formules:

$$u_x = -2Ax + ay + b;$$
$$u_y = 2[2(1-\sigma)A + 3(1-2\sigma)B]y - ax + c;$$
$$X_x = \frac{2E(1-\sigma)}{1+\sigma}\left(\frac{3\sigma}{1-\sigma}B - A\right);$$
$$Y_y = \frac{2E(1-\sigma)}{1+\sigma}\left(3B + \frac{2-\sigma}{1-\sigma}A\right), \quad X_y = Y_x = 0.$$

Les conditions aux limites du problème prennent la forme:

pour $x = 0$ $\quad u_x = Y_x = 0,$

pour $x = h$ $\quad X_x = -p, \; Y_x = 0,$

pour $y = \pm b$ $\quad Y_y = X_y = 0.$

D'après les conditions aux limites, on obtient:

$$A = \frac{(1-\sigma^2)p}{2E}, \quad B = -\frac{2-\sigma}{3(1-\sigma)}A, \quad a = b = c = 0.$$

En définitive, il vient:

$$u_x = -\frac{(1-\sigma^2)p}{E}x, \quad u_y = \frac{\sigma(1+\sigma)p}{E}y,$$
$$X_x = -p, \quad X_y = Y_x = Y_y = 0.$$

La solution obtenue coïncide avec la solution fournie par les formules de la résistance des matériaux.

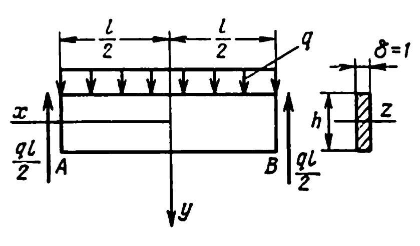


Fig. 32

5.2. Une poutre rectangulaire étroite ($\delta = 1$) s'appuie aux extrémités $x = \pm l/2$ et fléchit sous l'action d'une charge uniformément répartie d'intensité q (fig. 32).

Etudier l'état de contrainte dans la poutre.

L'appui est réalisé à l'aide de forces tangentielles appliquées aux extrémités, constituant des résultantes des contraintes tangentielles Y_x, et qui, en grandeur, sont égales aux réactions des appuis

qui apparaîtraient aux points A et B. Le problème est résolu en fonction des contraintes en définissant cette dernière sous la forme

$$\varphi(x,\ y) = \frac{d}{6} y^3 \left(x^2 - \frac{y^2}{5}\right) + \frac{b}{2} x^2 y + \frac{k}{6} y^3 + \frac{a}{2} x^2,$$

qui satisfait à l'équation (5.12).

Selon (5.11) les contraintes seront égales à:

$$X_x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = d\left(x^2 - \frac{2}{3} y^2\right) y + ky,$$

$$Y_y = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \left(\frac{d}{3} y^2 + b\right) y + a,$$

$$X_y = Y_x = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} = -(dy^2 + b)\,x.$$

Les conditions aux limites du problème sont:

1) pour $y = -h/2$ $Y_y = -q$, $X_y = 0$,

2) pour $y = h/2$ $Y_y = 0$, $X_y = 0$

étant exactes ou locales (pour chaque point du secteur correspondant). Pour $x = \pm l/2$, on a

$$\text{I. } N_x = \int_{-h/2}^{h/2} X_x\,dy = 0, \quad \text{II. } M_z = \int_{-h/2}^{h/2} X_x y\,dy = 0,$$

$$\text{III. } \int_{-h/2}^{h/2} Y_x dy = -\frac{ql}{2}$$

qui sont les conditions approchées ou intégrales vérifiées par le principe de Saint-Venant.

Selon les conditions I et II,

$$-dh^3/24 - bh/2 + a = -q,\ dh^2/4 + b = 0,\ dh^3/24 + bh/2 + a = 0,$$

d'où $a = -q/2$, $b = 3q/2h$, $d = -6q/h^3$.

Les conditions I et III sont identiquement satisfaites, ce qui se vérifie aisément par substitution.

Selon la condition II,

$$k = \frac{q}{2I_z}\left(\frac{l^2}{4} - \frac{h^2}{10}\right),$$

où $I_z = 1 \cdot h^3/12$ est le moment d'inertie de la poutre. En définitive, les contraintes seront égales à :

$$X_x = \frac{q}{2I_z}\left(\frac{2}{3}y^2 - x^2\right)y + ky =$$

$$= \frac{q}{2I_z}\left(\frac{l^2}{4} - x^2 + \frac{2}{3}y^2 - \frac{h^2}{10}\right)y;$$

$$Y_y = -\frac{q}{2I_z}\left(\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}h^2y + I_z\right);$$

$$X_y = Y_x = -\frac{q}{2I_z}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)x.$$

Selon les formules de la résistance des matériaux

$$X_x = \sigma_x = \frac{M_z}{I_z}y = \frac{q}{2I_z}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right)y,$$

où M_z est le moment fléchissant.

$Y_y = \sigma_y = 0$ (les fibres longitudinales ne compriment pas les unes les autres) ;

$$X_y = Y_x = \tau = \frac{QS_z^{\text{enl}}}{I_z\delta} = -\frac{q}{2I_z}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)x,$$

où S_z^{enl} est le moment statistique par rapport à l'axe z de la partie enlevée de la surface de la section transversale de la poutre ; Q la force transversale.

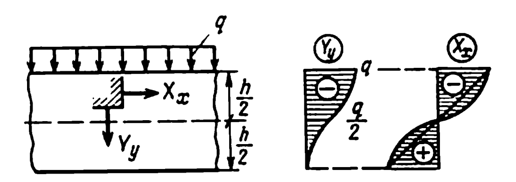


Fig. 33

Les épures de X_x et de Y_y sont données sur la figure 33.

▶ Une mince plaquette rectangulaire ($\delta = 1$) est chargée à ses

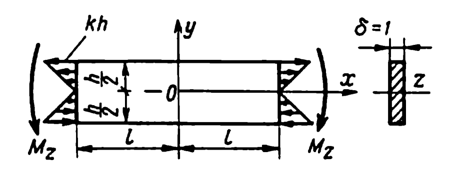


Fig. 34

extrémités par une charge $p = 2ky$ qui est réduite aux couples fléchissants M_z (fig. 34).

Etudier l'état de contrainte dans la plaquette en définissant la fonction des contraintes sous la forme

$$\varphi = Ay^3,$$

où A est une constante arbitraire.

Les conditions aux limites du problème sont:

pour $y = \pm h/2$ $\quad Y_y = X_y = 0,$

pour $x = \pm l$ $\quad Y_x = 0, \; X_x = 2ky.$

Réponse:

$$Y_y = X_y = 0,$$

$$X_x = 2ky = \frac{12M_z}{h^3}y = \frac{M_z}{I_z}y,$$

où $I_z = 1h^3/12$. Ce résultat est connu du cours de Résistance des matériaux.

5.3. Problème de Gémotchkine [26].

Faire le calcul d'une haute et étroite ($\delta = 1$) poutre-cloison, d'une hauteur h et qui possède un nombre infini de travées de même

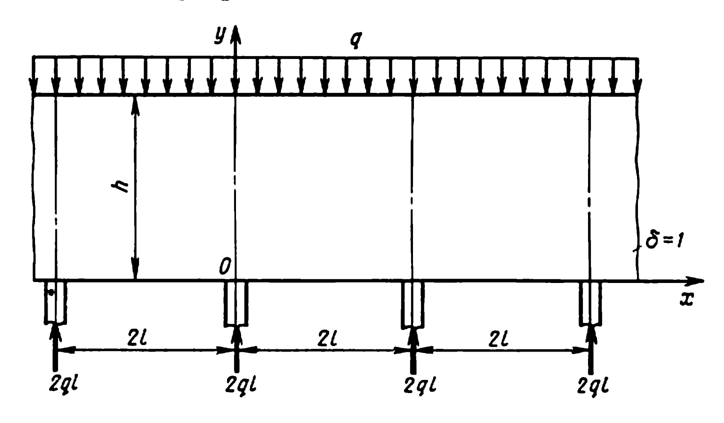


Fig. 35

longueur $2l$, reposant sur des colonnes. La charge d'intensité q est uniformément répartie sur le dessus de la poutre-cloison (fig. 35).

Dans l'hypothèse d'un nombre infini de travées, elles seront toutes soumises à des conditions identiques et il suffit d'étudier une seule de ces travées. Les réactions des appuis sont appliquées aux axes des colonnes et sont égales à $2ql$.

Comme les contraintes X_x et Y_y sont symétriques par rapport à l'axe Oy, la solution est recherchée sous forme d'une série trigonométrique en cosinus. Toutefois, la seule série trigonométrique ne suffit pas, vu que toutes les conditions ne sont pas satisfaites sur le contour, aussi faut-il adjoindre un polynôme de second degré.

La fonction des contraintes est définie sous la forme

$$\varphi(x, y) = A_1x^2 + A_2xy + A_3y^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha x \, (C_{1n} \operatorname{sh} \alpha y + C_{2n} \operatorname{ch} \alpha y + C_{3n} y \operatorname{sh} \alpha y + C_{4n} y \operatorname{ch} \alpha y),$$

où

$$\alpha = n\pi/l. \tag{a}$$

Il est bien entendu qu'avec l'adjonction à l'argument x de la grandeur $2l$ la fonction $\cos(\alpha x)$ ne varie pas, car

$$\cos\left[\frac{n\pi(x+2l)}{l}\right] = \cos\left(\frac{n\pi x}{l} + 2n\pi\right) = \cos \alpha x.$$

Cette dernière égalité montre que dans les travées suivantes toutes les grandeurs caractérisant l'état de contrainte se répètent et, partant, toutes les travées se trouvent dans des conditions identiques.

Les conditions aux limites du problème prennent la forme:
1) pour $x = 0, l$ par suite de la symétrie, $X_y = 0$;
2) la somme des contraintes Y_y, dans les limites d'une demi-travée, doit être égale à la charge dans les mêmes limites, c'est-à-dire

$$\int_0^l Y_y dx = -ql; \tag{b}$$

3) pour $y = 0$, $X_y = 0$;
4) pour $y = 0$, $Y_y = 0$;
5) pour $y = 0$, $x = 0{,}2l$, $Y_y \to \infty$, car la réaction est supposée être une force ponctuelle;
6) pour $y = h$, $X_y = 0$;
7) pour $y = h$, $Y_y = -q$.

La fonction des contraintes (a) une fois choisie, les contraintes se détermineront d'après les formules:

$$X_x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 2A_3 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cos \alpha x \, [\alpha (C_{1n} \operatorname{sh} \alpha y + C_{2n} \operatorname{ch} \alpha y + C_{3n} y \operatorname{sh} \alpha y + C_{4n} y \operatorname{ch} \alpha y) + 2 (C_{3n} \operatorname{ch} \alpha y + C_{4n} \operatorname{sh} \alpha y)],$$

$$Y_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 2A_1 -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^2 \cos \alpha x \,(C_{1n} \operatorname{sh} \alpha y + C_{2n} \operatorname{ch} \alpha y + C_{3n} y \operatorname{sh} \alpha y + C_{4n} y \operatorname{ch} \alpha y), \quad \text{(c)}$$

$$X_y = Y_x = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial y} = A_2 +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \sin \alpha x \,[\alpha \,(C_{1n} \operatorname{ch} \alpha y + C_{2n} \operatorname{sh} \alpha y + C_{3n} y \operatorname{ch} \alpha y +$$

$$+ C_{4n} y \operatorname{sh} \alpha y) + C_{3n} \operatorname{sh} \alpha y + C_{4n} \operatorname{ch} \alpha y]. \quad \text{(d)}$$

Des conditions aux limites 1, il s'ensuit que

$$A_2 = 0.$$

De la condition 2, voir formule (b)

$$2A_1 l - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \sin \alpha l \,(C_{1n} \operatorname{sh} \alpha y + C_{2n} \operatorname{ch} \alpha l + C_{3n} y \operatorname{sh} \alpha y +$$

$$+ C_{4n} y \operatorname{ch} \alpha y) = |\sin \alpha l = \sin n\pi = 0| = 2A_1 l = -ql, \quad \text{(e)}$$

d'où $A_1 = -q/2$.

De la condition 3, en utilisant la formule (*d*) pour $y = 0$, il vient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha \sin \alpha x \,(\alpha C_{1n} + C_{4n}) = 0,$$

d'où

$$\alpha C_{1n} + C_{4n} = 0. \quad \text{(f)}$$

De la condition 4 et des formules (c) et (e), il ressort que

$$q + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^2 C_{2n} \cos \alpha x = 0,$$

d'où, en répartissant la charge dans l'intervalle

$$0 < \alpha x < 2\pi$$

en série suivant $\cos \alpha x$,

$$q = -\sum_{n=1}^{\infty} 2q \cos \alpha x,$$

on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha x \,(2q - \alpha^2 C_{2n}) = 0$$

et, par suite,

$$C_{2n} = 2q/\alpha^2. \tag{g}$$

Pour $x = 0,\ 2l$ la formule de développement est inopérante, mais les contraintes en ces points sont infiniment grandes (condition aux limites 5).

De la condition 6 et de la formule (d), il s'ensuit:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha \sin \alpha x\, [\alpha\, (C_{1n} \operatorname{ch} \alpha h + C_{2n} \operatorname{sh} \alpha h + C_{3n} h \operatorname{ch} \alpha h + \\ + C_{4n} h \operatorname{sh} \alpha h) + C_{3n} \operatorname{sh} \alpha h + C_{4n} \operatorname{ch} \alpha h] = 0.$$

En égalant à zéro chaque terme de la somme et en substituant C_{4n} et C_{2n} suivant les formules (f) et (g), il vient:

$$\alpha\, (C_{1n} \operatorname{ch} \alpha h + \frac{2q}{\alpha^2} \operatorname{sh} \alpha h + C_{3n} h \operatorname{ch} \alpha h - \alpha C_{1n} h \operatorname{sh} \alpha h) + \\ + C_{3n} \operatorname{sh} \alpha h - \alpha C_{1n} \operatorname{ch} \alpha h = 0,$$

et après transformations

$$-\alpha^2 C_{1n} h \operatorname{sh} \alpha h + C_{3n}\, (\alpha h \operatorname{ch} \alpha h + \operatorname{sh} \alpha h) = -\frac{2q}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha h. \tag{h}$$

De la condition 7 et de la formule (c), il ressort

$$q + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^2 \cos \alpha x\, (C_{1n} \operatorname{sh} \alpha h + C_{2n} \operatorname{ch} \alpha h + C_{3n} h \operatorname{sh} \alpha h + \\ + C_{4n} h \operatorname{ch} \alpha h) = q,$$

d'où, compte tenu de (f) et de (g), il vient

$$C_{1n}\, (\operatorname{sh} \alpha h - \alpha h \operatorname{ch} \alpha h) + C_{3n} h \operatorname{sh} \alpha h = -\frac{2q}{\alpha^2} \operatorname{ch} \alpha h. \tag{i}$$

La vérification des contraintes X_x dans une section verticale quelconque montre que

$$\int_0^h X_x\, dy = 0 \text{ pour } A_3 = 0 \text{ [voir équation (i)]},$$

c'est-à-dire que la condition d'équilibre $\sum X = 0$ est vérifiée.

En résolvant le système des équations (h) et (i), on obtient les valeurs des coefficients restés inconnus de la formule (a):

$$C_{1n} = -\frac{2q}{\alpha^2} \frac{\alpha h + \operatorname{sh} \alpha h \cdot \operatorname{ch} \alpha h}{\operatorname{sh}^2 \alpha h - \alpha^2 h^2}. \tag{j}$$

$$C_{3n} = -\frac{2q}{\alpha} \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha h}{\operatorname{sh}^2 \alpha h - \alpha^2 h^2}. \tag{k}$$

L'analyse des coefficients numériques des formules (j) et (k) dans le cas d'une poutre-cloison d'hauteur suffisamment grande

($h \geqslant l$) autorise d'adopter pour la grandeur C_{in} des expressions plus simples :

$$C_{1n} \approx -2q/\alpha^2, \quad C_{2n} = 2q/\alpha^2, \quad C_{3n} \approx -2q/\alpha, \quad C_{4n} \approx 2q/\alpha. \tag{l}$$

Compte tenu des formules (l) et de la relation

$$\operatorname{ch} \alpha y - \operatorname{sh} \alpha y = e^{-\alpha y},$$

on obtient en définitive pour les contraintes les expressions suivantes

$$X_x = -2q \sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha x (1-\alpha y) e^{-\alpha y},$$

$$Y_y = -q-2q \sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha x (1-\alpha y) e^{-\alpha y},$$

$$X_y = Y_x = -2q \sum_{n=1}^{\infty} \alpha y \sin \alpha x e^{-\alpha y}. \tag{m}$$

Les séries des formules (m) convergent très vite pour tous les points à l'exception de deux situés près du bord inférieur de la poutre-cloison (pour des y petits).

Les calculs effectués pour la poutre-cloison avec $h = 2l$ et $\delta = 1$ sont donnés à la figure 36.

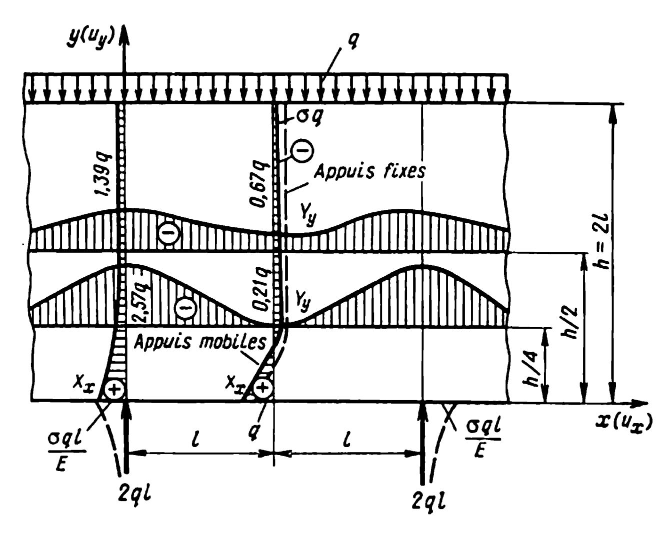


Fig. 36

Les déplacements se déterminent par intégration des équations (5.4) :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{1}{E}(X_x - \sigma Y_y), \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{1}{E}(Y_y - \sigma X_x),$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{2(1+\sigma)}{E} X_y,$$

ce qui donne

$$u_x=\frac{2q}{E}\left\{\frac{\sigma x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha}\sin\alpha x\,[(1+\sigma)\,\alpha y-(1-\sigma)]\,e^{-\alpha y}\right\}+F_1(y),$$

$$u_y=\frac{2q}{E}\left\{-\frac{y}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha}\cos\alpha x\,[(1+\sigma)\,\alpha y+2]\,e^{-\alpha y}\right\}+F_2(x),$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}+\frac{\partial F_2}{\partial x}=0, \tag{n}$$

où $F_1(y)$ et $F_2(x)$ sont des fonctions satisfaisant à la troisième relation de (n) ainsi qu'aux conditions de déformation.

La présence de forces ponctuelles introduit une incertitude dans les déplacements verticaux et on ne peut considérer l'origine des coordonnées comme fixe que pour des déplacements horizontaux u_x.

En supposant arbitrairement que pour $x = l$ et $y = 0$ les déplacements u_x et u_y sont nuls, on est en mesure de déterminer les fonctions arbitraires F_i ainsi que de comparer les déplacements d'autres points avec celui du point choisi.

Dans ce cas

$$F_1(y)=-\sigma ql/E,\quad F_2(x)=-\frac{4q}{E}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha}\cos\alpha l, \tag{o}$$

comme on le voit les valeurs de (o) obtenues vérifient également la troisième équation de (n).

Pour $x = 0$, $u_x = -\sigma ql/E$,
pour $x = 2l$, $u_x = \sigma ql/E$.

Au cas d'appuis fixes, si la poutre-cloison ne peut s'allonger librement, au lieu de la condition

$$\int_0^h X_x\,dy=0$$

il faut poser la condition que pour $x = 0$, $u_x = 0$.

Les équations fondamentales demeurent les mêmes, mais le coefficient A_3 sera différent de zéro et

$$X_x=-\sigma q-2q\sum_{n=1}^{\infty}\cos\alpha x\,(1-\alpha y)\,e^{-\alpha y};$$

les contraintes restantes se déterminent d'après les formules (m).

L'épure des contraintes X_x pour la section moyenne, au cas d'appuis fixes, est donnée à la figure 36 par une ligne en traits interrompus. Dans ce cas la contrainte X_x pour $y = 0$ est égale à $q(1-\sigma)$, la poutre-cloison subissant une compression uniforme supplémentaire, égale à σq.

5.4. Problème de Lévy (1898) [4].

Déterminer les contraintes à l'intérieur d'un coin infiniment fin sous l'effet de l'action d'un liquide de poids spécifique γ, le poids spécifique de la substance du coin étant p (fig. 37).

La fonction des contraintes est définie comme un polynôme homogène de troisième degré:

$$\varphi(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3,$$

où a, b, c, d sont des grandeurs constantes.

Les conditions aux limites du problème prennent la forme:

$$\text{pour } y = -x \operatorname{ctg} \alpha \text{ ou } x = -y \operatorname{tg} \alpha$$

$$-X_x \cos \alpha - X_y \sin \alpha = \gamma y \cos \alpha; \quad -X_y \cos \alpha - Y_y \sin \alpha = \gamma y \sin \alpha;$$

$$\text{pour } y = x \operatorname{ctg} \beta \quad \text{ou} \quad x = y \operatorname{tg} \beta$$

$$X_x \cos \beta - X_y \sin \beta = 0, \quad X_y \cos \beta - Y_y \sin \beta = 0,$$

où les contraintes sont déterminées d'après les formules (5.11) avec $Y = p$ et $X = 0$.

En résolvant les équations des conditions aux limites, il vient:

$$a = \frac{1}{6(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)^3}[p(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha) - \gamma(2 - 3\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}^2\alpha)];$$

$$b = \frac{1}{4}\left[-p - \frac{\gamma \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} - 6a(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha)\right];$$

$$c = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\left(\frac{\gamma}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} - 6a\right);$$

$$d = \frac{\operatorname{tg}^2\beta}{12}\left[-p - \frac{3\gamma\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} + 6a(3\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)\right].$$

Les contraintes se déterminent d'après les formules (5.11):

$$X_x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 2cx + 6dy; \quad Y_y = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 6ax + 2by;$$

$$X_y = Y_x = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} - px = -2cy - (2b + p)x.$$

La solution de Lévy aboutit à une répartition linéaire des contraintes normales et tangentielles et peut être utilisée pour le calcul des barrages.

5.5. Problème de Galerkine (1929) [27].

Déterminer les contraintes au sein d'une section $ABCD$ infinie de forme trapézoïdale soumise à l'action d'un matériau de poids spécifique p (fig. 38).

On partage la solution en trois parties :

1) On définit la fonction des contraintes φ pour un profil triangulaire AOB (voir problème 5.4).

2) On établit la fonction des contraintes pour un profil triangulaire AOB, quant à son sommet O il est soumis à l'action d'une

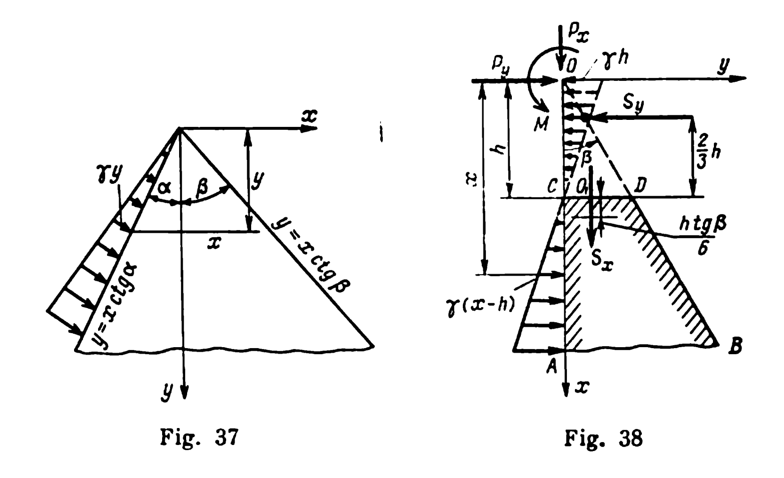


Fig. 37 Fig. 38

force horizontale P_y — φ_1, d'une force verticale P_x — φ_2 et d'un moment M — φ_3 :

$$\varphi_1 = -\frac{y(\beta - \sin\beta\cos\beta) + x^2\sin^2\beta}{\beta^2 - \sin^2\beta} \operatorname{arctg}\frac{y}{x} P_y ;$$

$$\varphi_2 = \frac{y\sin^2\beta + x(\beta\sin\beta\cos\beta)}{\beta^2 - \sin^2 6} \operatorname{arctg}\frac{y}{x} P_x ;$$

$$\varphi_3 = \frac{M}{2(\sin\beta - \beta\cos\beta)} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\sin\beta - \frac{2xy}{x^2 + y^2}\cos\beta + \right.$$

$$\left. + 2\cos\beta \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \right).$$

3) On choisit les valeurs des forces P_y, P_x et du moment M de manière que les contraintes sur le plan CD, en s'additionnant pour des valeurs données aux points 1, 2, se réduisent à un système de forces choisies sur ce plan.

Selon le problème (5.4) avec la substitution de y à x, on obtient

$$\varphi = \frac{p\operatorname{ctg}\beta}{6} y^3 - \frac{p}{2} y^2 x.$$

Les forces de gravité créent sur le plan *CD* des efforts (voir fig. 38):

$$S_y = 0, \quad S_x = \frac{ph^2}{2} \operatorname{tg} \beta, \quad M_{O_1} = S_x \frac{h \operatorname{tg} \beta}{6} = \frac{ph^3}{12} \operatorname{tg}^2 \beta.$$

Comme le plan *CD* n'est pas sollicité par des forces extérieures, on a

$$\sum X = 0, \; P_x + S_x = 0, \; \sum Y = 0, \; P_y = 0,$$

$$\sum M_{O_1} = 0, \quad P_x \frac{h \operatorname{tg} \beta}{2} + M + S_x \frac{h \operatorname{tg} \beta}{6} = 0,$$

d'où, il vient

$$P_x = -\frac{ph^2}{2} \operatorname{tg} \beta, \quad P_y = 0, \quad M = \frac{ph^3}{6} \operatorname{tg}^2 \beta.$$

La fonction des contraintes pour un profil trapézoïdal sera donc

$$\Phi(x, y) = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3,$$

tandis que les contraintes se déterminent d'après les formules:

$$X_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad Y_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad X_y = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \, \partial y} - py.$$

▶ Déterminer les contraintes au sein d'une section trapézoïdale infinie *ABCD* soumise à l'action d'un liquide de poids spécifique γ (voir fig. 38).

Dans ce cas la fonction des contraintes φ sera

$$\varphi = -\frac{\gamma}{6} (2y^3 \operatorname{ctg} \beta - 3y^2 x \operatorname{ctg} \beta + 3yx^2 + x^3).$$

5.6. Problème de Kolossov (1910) [20].

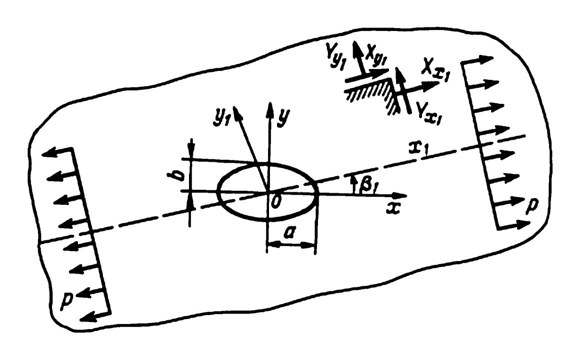


Fig. 39

Une plaque infinie est affaiblie par une perforation elliptique et est soumise à une traction uniforme aux contraintes p, dirigées sous un angle β_1 par rapport à l'axe x (fig. 39).

Etudier l'état de contrainte.

La région se trouvant en dehors de la perforation elliptique, dans le domaine complexe $z = x + iy$, peut être appliquée sur le domaine situé en dehors du cercle unitaire, dans le domaine complexe $\zeta = \xi + i\eta$, au moyen de la fonction d'application [20]

$$z = f(\zeta) = c(\zeta + m/\zeta), \tag{a}$$

où $0 \leqslant m \leqslant 1$, $c > 0$.

Le contour du cercle unitaire $|\zeta| = 1$ correspond à l'ellipse de centre à l'origine des coordonnées pour le plan z et les demi-axes

$$a = c(1 + m), \quad b = c(1 - m). \tag{b}$$

Selon les formules (b)

$$c = (a + b)/2, \quad m = (a - b)/(a + b). \tag{c}$$

Avec la rotation des axes de l'angle β_1, la dépendance entre les contraintes d'après les formules (1.5) et (1.3) prend la forme:

$$X_{x1} + Y_{y1} = X_x + Y_y; \quad Y_{y1} - X_{x1} + 2iX_{y1} = \\ = e^{2i\beta_1}(Y_y - X_x - 2iX_y).$$

Puisque à l'infini

$$X_{x_1}^{\infty} = p, \quad Y_{y_1}^{\infty} = X_{y_1}^{\infty} = 0,$$

on a

$$X_x + Y_y = p, \; Y_y - X_x + 2iX_y = -pe^{-2i\beta_1}.$$

Selon les formules (5.21) à l'infini

$$4 \operatorname{Re} \psi'(z) = p, \; 2[\bar{z}\psi''(z) + \chi''(z)] = -pe^{-2i\beta_1}. \tag{d}$$

Pour la perforation elliptique d'après (5.22) et (5.19),

$$\left.\begin{aligned} F_x + iF_y &= 0; \\ \psi(z) + \overline{z\psi'(z)} + \overline{\chi'(z)} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{e}$$

En se servant de la formule (a), on obtient:

$$\left.\begin{aligned} \psi(z) &= \psi[f(\zeta)] = \psi_1(\zeta), \\ \chi(z) &= \chi[f(\zeta)] = \chi_1(\zeta). \end{aligned}\right\}$$

Alors

$$\left.\begin{aligned} \psi'(z) &= \frac{d\psi}{dz} = \frac{d\psi_1}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dz} = \frac{\psi_1'(\zeta)}{f'(\zeta)}; \\ \chi'(z) &= \frac{d\chi}{dz} = \frac{d\chi_1}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dz} = \frac{\chi_1'(\zeta)}{f'(\zeta)}; \\ \psi''(z) &= \frac{d}{d\zeta}\left[\frac{\psi_1'(\zeta)}{f'(\zeta)}\right]\frac{d\zeta}{dz} = \frac{\psi_1''(\zeta)f'(\zeta) - \psi_1'(\zeta)f''(\zeta)}{[f'(\zeta)]^3}; \\ \chi''(z) &= \frac{d}{d\zeta}\left[\frac{\chi_1'(\zeta)}{f'(\zeta)}\right]\frac{d\zeta}{dz} = \frac{\chi_1''(\zeta)f'(\zeta) - \chi_1'(\zeta)f''(\zeta)}{[f'(\zeta)]^3}. \end{aligned}\right\} \tag{f}$$

En reportant les expressions (f) dans les formules (5.20), (5.21), (5.22) et (5.23), on obtient:

$$u_x+iu_y=\frac{3-\sigma}{E}\psi_1(\zeta)-\frac{1+\sigma}{E}\left[\frac{f(\zeta)}{f'(\zeta)}\overline{\psi_1'(\zeta)}+\overline{\chi_1'(\zeta)}\right]; \qquad (g)$$

$$X_x+Y_y=4\,\mathrm{Re}\frac{\psi_1'(\zeta)}{f'(\zeta)}; \qquad (h)$$

$$X_y-X_x+2iX_y=\frac{2}{[f'(\zeta)]^3}[\overline{f(\zeta)}\psi_1''(\zeta)f'(\zeta)-\overline{f(\zeta)}\psi_1'(\zeta)f''(\zeta)+$$
$$+\chi_1''(\zeta)f'(\zeta)-\chi_1'(\zeta)f''(\zeta)];$$

$$F_x+iF_y=-i\left[\psi_1(\zeta)+\frac{f(\zeta)}{\overline{f'(\zeta)}}\overline{\psi_1'(\zeta)}+\frac{\overline{\chi_1'(\zeta)}}{\overline{f_1'(\zeta)}}\right]_A^B; \qquad (i)$$

$$M=\mathrm{Re}\left[\chi_1(\zeta)-\frac{f(\zeta)}{f'(\zeta)}\chi_1'(\zeta)-\frac{f(\zeta)\overline{f(\zeta)}}{f'(\zeta)}\psi_1'(\zeta)\right]_A^B.$$

Pour que les contraintes soient univoques les fonctions $\psi_1''(\zeta)$ et $\chi_1''(\zeta)$ doivent prendre la forme:

$$\psi_1'(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\zeta^{-n}, \quad \chi_1''(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\zeta^{-n}. \qquad (j)$$

Des équations (e) et (i) il ressort que sur le cercle $|\zeta|=1$ on a la relation

$$\left.\begin{array}{l}\overline{f'(\zeta)}\psi_1(\zeta)+f(\zeta)\overline{\psi_1'(\zeta)}+\overline{\chi_1'(\zeta)}=0\\ \text{et pour les fonctions conjuguées}\\ f'(\zeta)\overline{\psi_1(\zeta)}+\overline{f(\zeta)}\psi_1'(\zeta)+\chi_1'(\zeta)=0.\end{array}\right\} \qquad (k)$$

En intégrant les formules (j), il vient:

$$\left.\begin{array}{l}\psi_1(\zeta)=A_0\zeta+A_1\,\mathrm{Log}\,\zeta+\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{A_n\zeta^{1-n}}{1-n}+A;\\ \chi_1'(\zeta)=B_0\zeta+B_1\,\mathrm{Log}\,\zeta+\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n\zeta^{1-n}}{1-n}+B,\end{array}\right\} \qquad (l)$$

où A et B sont des constantes complexes qui caractérisent les déplacements du corps solide.

En reportant l'expression (l) dans la formule (g), on obtient la condition de l'univocité des déplacements, c'est-à-dire l'égalité à zéro du coefficient accompagnant Log ζ:

$$(3-\sigma)A_1+(1+\sigma)\overline{B}_1=0. \qquad (m)$$

Avec $|\zeta| = 1$, on a

$$f'(\zeta) = c\left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right) = c\,(1 - me^{i2\beta});$$

$$\overline{f(\zeta)} = c\left(\bar{\zeta} + \frac{m}{\zeta}\right) = c\,(e^{-i\beta} + me^{i\beta});$$

$$\overline{\psi_1(\zeta)} = \bar{A}_0\bar{\zeta} + \bar{A}_1 \operatorname{Log} \bar{\zeta} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\bar{A}_n \bar{\zeta}^{1-n}}{1-n} =$$

$$= \bar{A}_0 e^{-i\beta} - iA_1\beta - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \bar{A}_n e^{i(n-1)\beta};$$

$$\psi_1'(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{in\beta}, \quad \chi_1'(\zeta) = B_0 e^{i\beta} + iB_1\beta - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} B_n e^{i(1-n)\beta}.$$

En reportant ces expressions dans l'équation (k) et en égalant les coefficients accompagnant β et $e^{in\beta}$, on obtient :

$$\left.\begin{aligned} & c\bar{A}_1 + B_1 = 0; \\ & -c\bar{A}_2 + \frac{cm}{3}\bar{A}_4 + cmA_0 + B_0 = 0; \\ & cA_1 + cmA_3 - \frac{B_3}{3} = 0; \\ & c\bar{A}_0 + cm\bar{A}_2 + cA_0 + mA_2 - B_2 = 0; \\ & -cm\bar{A}_0 + cA_2 + cmA_4 - \frac{B_4}{3} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(n)}$$

Pour $n \geqslant 3$, $A_n = 0$, pour $n \geqslant 5$, $B_n = 0$. Selon les formules (d)

$$A_0 = \frac{cp}{4}, \qquad B_0 = -\frac{c^2p}{2} e^{-2i\beta_1}.$$

En résolvant la première équation de (n) avec l'équation (m), on obtient : $A_1 = B_1 = 0$. En résolvant les équations restantes du système (n), il vient :

$$A_2 = \frac{cp}{4}(m - 2e^{2i\beta_1});$$

$$B_2 = \frac{c^2p}{2}(1 + m^2 - 2m\cos\beta_1);$$

$$B_3 = 0, \qquad B_4 = -\frac{3cp}{2} e^{2i\beta_1}.$$

Les fonctions cherchées seront :

$$\psi'(\zeta) = \frac{cp}{4} + \frac{cp}{4}(m - 2e^{2i\beta_1})\zeta^{-2};$$

$$\chi''(\zeta) = -\frac{c^2p}{2} e^{-2i\beta_1} + \frac{c^2p}{2}(1 - m^2 - 2m\cos 2\beta_1)\zeta^{-2} - \frac{3cp}{2} e^{2i\beta_1}\zeta^{-4}.$$

De là, selon la formule (h), il vient :

$$X_x + Y_y = \frac{p}{1 + m^2 - 2m\cos 2\beta}\,[1 - m^2 - 2\cos 2(\beta_1 - \beta) + \\ + 2m\cos 2\beta\cos 2(\beta_1 - \beta) - 2m\sin 2\beta\,\sin 2(\beta_1 - \beta)].$$

La contrainte maximale s'exercera à l'extrémité du grand demi-axe ($\beta = 0$) pour la valeur $\beta_1 = \pi/2$. En ce point $X_x = 0$ et

$$\max Y_y = p\,\frac{1 - m^2 + 2 - 2m}{1 + m^2 - 2m} = p\,\frac{3 + m}{1 - m}.$$

Compte tenu des formules (c), on obtient en définitive

$$\max Y_y = p\,(1 + 2a/b). \qquad \text{(o)}$$

L'équation (o) exprime les résultats du problème de G. Kolossov.

▶Quand $m = 0$ et $\beta_1 = 0$, on obtient la solution pour une perforation circulaire du problème de Kirsch (voir problème 6.7).

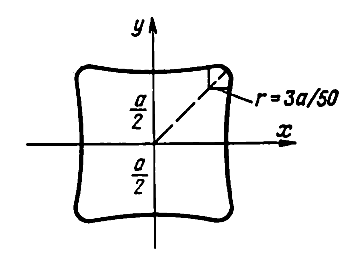


Fig. 40

▶Chercher la loi de répartition des contraintes dans une plaque infinie affaiblie par une perforation carrée et soumise à une traction dans deux directions; les efforts de traction dans l'infini $X_{x_1}^{\infty} = Y_{y_1}^{\infty} = p$, $X_{y_1}^{\infty} = 0$ sont inclinés par rapport à l'axe x de l'angle β_1. La perforation carrée dans le plan z sera appliquée sur le cercle unitaire dans le plan ζ à l'aide de la fonction traduisant l'application

$$z \approx c\left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{6}\zeta^3\right), \qquad \text{(p)}$$

où $c = 3a/5$,

a le côté du carré curviligne (fig. 40).

L'équation du contour s'obtient à partir de la formule (p) pour $|\zeta| = 1$:

$$x = c\left(\cos\beta - \frac{1}{6}\cos 3\beta\right), \quad y = -c\left(\sin\beta + \frac{1}{6}\sin 3\beta\right)$$

5.7. Voir monographie [21].

Résoudre le premier problème fondamental pour le demi-plan $y \leqslant 0$. A la limite du demi-plan (axe Ox) sont appliquées les contrain-

tes normale $Y_y = N(x)$ et tangentielle $X_y = T(x)$ qui sont continues et satisfont pour des $|x|$ grands aux conditions $N = 0(1/x)$; $T = 0(1/x)$.

En additionnant les formules (5.21), on obtient

$$Y_y + iX_y = \psi'(z) + \overline{\psi'(z)} + \bar{z}\psi''(z) + \chi''(z);$$

et, par suite, la condition aux limites peut être écrite sous la forme:

$$N + iT = \Phi(t) + \dot{\Phi}(t) + \bar{t}\Phi'(t) + \psi(t),$$

ou, ce qui revient au même,

$$N - iT = \overline{\Phi(t)} + \Phi(t) + t\overline{\Phi'(t)} + \psi(t), \qquad \text{(a)}$$

où pour simplifier l'écriture, on a adopté

$$\psi'(t) = \Phi(t) \text{ et } \chi''(t) = \psi(t).$$

Pour le cas où les fonctions (a) sont holomorphes et disparaissent à l'infini, on démontre ([21], p. 361) qu'elles sont égales à:

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{N - iT}{t - z}\,dt, \qquad \text{(b)}$$

$$\psi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{N + iT}{t - z}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{N - iT}{(t - z)^2}\,t\,dt. \qquad \text{(c)}$$

De façon analogue se résout le problème de Mitchell (1902) ([21], § 93a).

Déterminer l'état de contrainte dans le demi-plan $y \leqslant 0$, quand le segment $-a \leqslant t \leqslant a$ de l'axe Ox est soumis à une pression uniforme p (fig. 41).

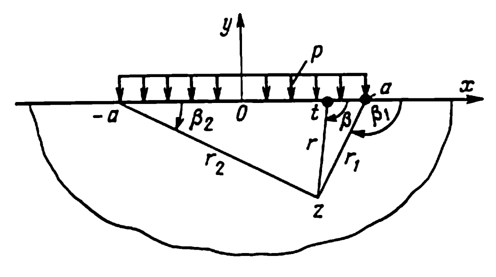


Fig. 41

Dans le cas considéré $T = 0$, tandis que $N = -p$ quand $-a \leqslant t \leqslant a$ et $N = 0$ pour les autres valeurs de t.

Selon les formules (b) et (c):

$$\Phi(z) = -\frac{p}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{dt}{z-t} = \frac{p}{2\pi i}\left[\mathrm{Log}\,(z-t)\right]_{t=-a}^{t=a} = \frac{p}{2\pi i}\,\mathrm{Log}\,\frac{z-a}{z+a}\,;$$

$$\psi(z) = -\frac{zp}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{dt}{(t-z)^2} = -\frac{paz}{\pi i\,(z^2-a^2)}.$$

L'expression $\mathrm{Log}\,\frac{z-a}{z+a}$ est l'accroissement de la fonction Log $(z - t)$ au cours de la variation continue de t de $-a$ à $+a$: $z - t = re^{-i\beta}$; $\mathrm{Log}\,(z-t) = \mathrm{Log}\,r - i\beta$; $\mathrm{Log}\,\frac{z-a}{z+a} = \mathrm{Log}\,\frac{r_1}{r_2} - i\,(\beta_1 - \beta_2)$.

Les contraintes seront déterminées d'après les formules (5.21):

$$X_x + Y_y = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(z) = -\frac{2p}{\pi}(\beta_1-\beta_2)\,; \qquad \text{(d)}$$

$$Y_y - X_x + 2iX_y = 2\left[\bar{z}\Phi'(z) + \psi(z)\right] =$$
$$= \frac{2pa}{\pi i}\cdot\frac{\bar{z}-z}{z^2-a^2} = \frac{4pay}{\pi(z^2-a^2)} = \frac{4pay\,(\bar{z}^2-a^2)}{\pi\,(z^2-a^2)\,(\bar{z}^2-a^2)}, \qquad \text{(e)}$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} X_x &= -\frac{p}{\pi}(\beta_1-\beta_2) + \frac{2pay\,(x^2-y^2-a^2)}{\pi\left[(x^2+y^2-a^2)^2+4a^2y^2\right]}\,;\\ Y_y &= -\frac{p}{\pi}(\beta_1-\beta_2) - \frac{2pay\,(x^2-y^2-a^2)}{\pi\left[(x^2+y^2-a^2)^2+4a^2y^2\right]}\,;\\ X_y &= \frac{4paxy^2}{\pi\left[(x^2+y^2-a^2)^2+4a^2y^2\right]}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(f)}$$

Posant dans la formule (e) $z^2 - a^2 = r_1 r_2 e^{-i(\beta_1+\beta_2)}$, on obtient $Y_y - X_x + 2iX_y = -\frac{4pay}{r_1r_2}e^{i(\beta_1+\beta_2)}$ (e′) soit, compte tenu de (d),

$$\left.\begin{aligned} X_x &= -\frac{p}{\pi}(\beta_1-\beta_2) + 2pa\,\frac{y\cos(\beta_1+\beta_2)}{r_1r_2}\,;\\ Y_y &= -\frac{p}{\pi}(\beta_1-\beta_2) - 2pa\,\frac{y\cos(\beta_1+\beta_2)}{r_1r_2}\,;\\ X_y &= -2pa\,\frac{y\sin(\beta_1+\beta_2)}{r_1r_2}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(f′)}$$

Les contraintes s'exercent de façon continue jusqu'à la limite. Aux points $t = \pm a$ les contraintes cessent d'être continues tout en restant limitées ($y = -r_1 \sin\beta_1 = -r_2 \sin\beta_2$).

Les déplacements sont continues y compris jusqu'à la limite entière (les points $t = \pm a$ compris). Pour $|z| \to \infty$ les déplacements croissent comme Log $|z|$.

▶Déterminer l'état de contrainte dans le demi-plan $y \leqslant 0$, quand sur le segment $-a \leqslant t \leqslant a$ de l'axe Ox s'exercent constamment des contraintes tangentielles.

5.8. Une bande rectangulaire s'étendant suivant l'axe x (pour $y = 0$ et $y = h$) est située entre deux plans parfaitement durs et lisses; aux extrémités de la bande (pour $x = 0$ et $x = l$) règnent des conditions arbitraires : statiques, géométriques ou mixtes (fig. 42).

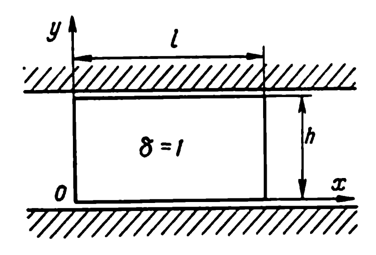


Fig. 42

Déterminer les états de contrainte et de déformation pour le cas d'un état de contrainte plan ($\delta = 1$).

Quand $y = 0$ et $y = h$

$$u_y = X_y = 0. \tag{a}$$

Dans ce cas on a pour les fonctions initiales:

$$u_y^0 = X_y^0 = 0.$$

En satisfaisant aux conditions aux limites (a) pour $y = h$, on obtient un système de deux équations différentielles d'ordre infiniment grand par rapport aux fonctions initiales cherchées u_x^0 et Y_y^0:

$$\begin{gathered}[(1-\sigma)\sin(\alpha h)-(1+\sigma)\alpha h\cos(\alpha h)]\,u_x^0+\\+\frac{1}{2}\left[(3-\sigma)\frac{\sin\alpha h}{\alpha}-(1+\sigma)h\cos(\alpha h)\right]Y_y^0=0;\\-2(1+\sigma)\alpha[\sin(\alpha h)+\alpha h\cos(\alpha h)]\,u_x^0+\\+[(1-\sigma)\sin(\alpha h)-(1+\sigma)\alpha h\cos(\alpha h)]\,Y_y^0=0.\end{gathered} \tag{b}$$

En introduisant la fonction de décision $F(x)$ suivant les formules

$$\left.\begin{aligned}u_x^0&=\left[\frac{1-\sigma}{1+\sigma}\sin(\alpha h)-\alpha h\cos(\alpha h)\right]F,\\Y_y^0&=2\alpha[\sin(\alpha h)+\alpha h\cos(\alpha h)]\,F,\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

on satisfait de façon identique à la seconde équation de (b), tandis que la première équation prend la forme

$$[\sin^2(\alpha h)]\,F = 0. \tag{d}$$

La solution de l'équation (d) est prise sous la forme

$$F = Ce^{kx}. \tag{e}$$

En reportant l'expression (e) dans l'équation (d), on aboutit à l'équation

$$\sin^2 (kh) = 0, \tag{f}$$

d'où

$$k = k_n = n\pi/h,$$

où n est un nombre positif quelconque.

Ainsi donc la solution générale de l'équation (d) sera

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \operatorname{ch}(k_n x) + B_n \operatorname{sh}(k_n x) + C_n x \operatorname{ch}(k_n x) + D_n x \operatorname{sh}(k_n x), \tag{g}$$

où A_n, B_n, C_n et D_n sont des constantes arbitraires.

De la solution générale disparaît la solution élémentaire en polynômes qui correspond aux racines nulles de l'équation (f).

Pour trouver la solution élémentaire représentons les équations (b) sous la forme de séries infinies et dégageons y les premiers termes:

$$-2\sigma\alpha u_x^0 + (1-\sigma) Y_y^0 = 0; \quad 2(1+\sigma)\alpha^2 u_x^0 + \sigma\alpha Y_y^0 = 0. \tag{h}$$

De l'équation (h), il vient

$$u_x^0 = \frac{1-\sigma}{2} B_0 x + A_0, \quad Y_y^0 = \sigma B_0, \quad X_x = B_0. \tag{i}$$

En utilisant les expressions (i), (c), (g) et (5.29), on aboutit aux formules suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
u_x = A_0 &+ \frac{1-\sigma}{2} B_0 x - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n h \Big\{k_n \operatorname{sh}(k_n x) A_n + \\
&+ k_n \operatorname{ch}(k_n x) B_n + \left[\frac{2\sigma}{1+\sigma} \operatorname{ch}(k_n x) + k_n x \operatorname{sh}(k_n x)\right] C_n + \\
&+ \left[\frac{2\sigma}{1+\sigma} \operatorname{sh}(k_n x) + k_n x \operatorname{ch}(k_n x)\right] D_n\Big\} \cos(k_n y); \\
u_y = &\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n h \Big\{k_n \operatorname{ch}(k_n x) A_n + k_n \operatorname{sh}(k_n x) B_n + \\
&+ \left[\frac{3+\sigma}{1+\sigma} \operatorname{sh}(k_n x) + k_n x \operatorname{ch}(k_n x)\right] C_n + \\
&+ \left[\frac{3+\sigma}{1+\sigma} \operatorname{ch}(k_n x) + k_n x \operatorname{sh}(k_n x)\right] D_n\Big\} \sin(k_n y); \\
Y_y = \sigma B_0 &+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n k_n h \{k_n \operatorname{ch}(k_n x) A_n + \\
&+ k_n \operatorname{sh}(k_n x) B_n + [3 \operatorname{sh}(k_n x) + k_n x \operatorname{ch}(k_n x)] C_n + \\
&+ [3 \operatorname{ch}(k_n x) + k_n x \operatorname{sh}(k_n x)] D_n\} \cos(k_n y);
\end{aligned}\right\} \tag{j}$$

$$X_x = B_0 - 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n k_n h \{k_n \operatorname{ch}(k_n x) A_n + \\ + k_n \operatorname{sh}(k_n x) B_n + [\operatorname{sh}(k_n x) + k_n x \operatorname{ch}(k_n x)] C_n + \\ + [\operatorname{ch}(k_n x) + k_n x \operatorname{sh}(k_n x)] D_n\} \cos(k_n y).$$

$$X_y = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n k_n h \{k_n \operatorname{sh}(k_n x) A_n + k_n \operatorname{ch}(k_n x) B_n + \\ + [2\operatorname{ch}(k_n x) + k_n x \operatorname{sh}(k_n x)] C_n + \\ + [2\operatorname{sh}(k_n x) + k_n x \operatorname{ch}(k_n x)] D_n\} \sin(k_n y).$$

A l'aide des constantes arbitraires A_0, B_0, A_n, B_n, C_n, D_n ($n = 1, 2, 3, \ldots, \infty$) on peut satisfaire à toutes conditions aux limites sur les côtés $x = 0$ et $x = l$.

Les formules (j) sont des formules généralisées des solutions connues de Filon et de Ribiere [29, 30].

▶ Résoudre un problème identique au cas où, pour $y = 0$ et $y = h$, $u_x = Y_y = 0$.

▶ Idem quand pour $y = 0$ et $y = h$, $Y_y = X_y = 0$ (voir référence [31]).

5.9. Une mince bande rectangulaire ($\delta = 1$) est soumise à une force égale à 1 au point $x = c$, $y = h$. Les bords de la bande ($x = \pm l$)

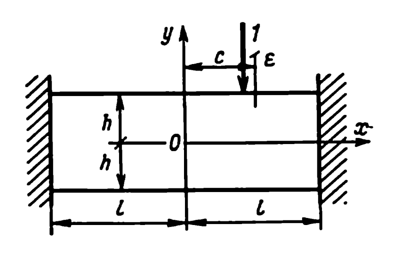


Fig. 43

sont encastrés ($u_x = 0$ suivant toute la hauteur $2h$, $u_y = 0$, quand $y = 0$) (fig. 43).

Formuler les conditions aux limites du problème.

La force ponctuelle au point $x = c$ peut être représentée dans l'intervalle $-l \leqslant x \leqslant l$ comme une limite de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ pour } -l \leqslant x < c, \\ p \text{ pour } c \leqslant x \leqslant c + \varepsilon, \\ 0 \text{ pour } c + \varepsilon < x \leqslant l \end{cases} \qquad \text{(a)}$$

quand $\varepsilon \to 0$; le produit $p\varepsilon$ reste fini et est égal à l'unité.

Compte tenu de l'expression (a) remplaçons la force par une série trigonométrique

$$f(x)=\frac{1}{2l}+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi c}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi c}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Les conditions aux limites sur les bords longitudinaux seront: quand $y = h$

$$Y_y=\frac{1}{2l}+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi c}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi c}{l}\sin\frac{n\pi x}{l},\quad X_y=0,$$

quand $y = -h$

$$Y_y = X_y = 0.$$

Les conditions aux limites sur les bords transversaux pour $x = \pm l$ seront:

$$u_x = 0 \text{ pour } -h < y < h,$$

$$u_y = 0 \text{ pour } y = 0.$$

5.10. Faire le calcul d'une poutre-cloison carrée chargée comme c'est montré à la figure 44.

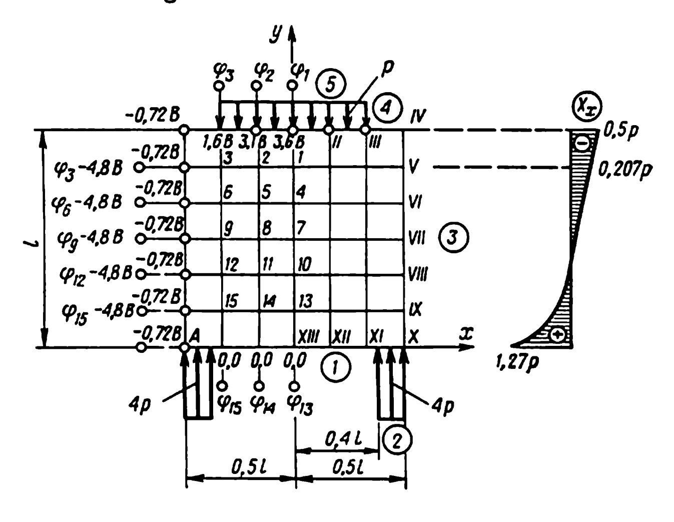


Fig. 44

Calculons la valeur de la fonction des contraintes sur le contour.

Tronçon **1**:

$$Y_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}=c_1,\quad \varphi=c_1x+c_2,\quad X_y=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=c_3.$$

Posons $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Tronçon 2:

$$Y_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=-4p,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}=-4px+c_4,\quad \varphi=-2px^2+c_4x+c_5,$$

$$X_y=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}=0,\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=c_6.$$

A la limite des tronçons *1* et *2* les valeurs des fonctions et de leurs dérivées doivent coïncider,

d'où

$$-4px+c_{4|x=0,4l}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=c_6=0,\quad -2px^2+c_4x+c_{5|x=0,4l}=0.$$

Donc, $c_4=1{,}6pl$, $c_5=-0{,}32pl^2$ et pour le tronçon *2*

$$\varphi=-2px^2+1{,}6plx-0{,}32pl^2,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=0.$$

Quand $x=l/2$ $\varphi=0{,}72B$, où $B=pl^2/36$.

Tronçon 3:

$$X_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=c_7,\quad \varphi=c_7y+c_8,\quad Y_x=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}=c_9.$$

De l'égalité des valeurs limites des tronçons *2* et *3*, il ressort:

$$c_7=0,\ c_8=(-2px^2+1{,}6plx-0{,}32pl^2)_{x=0,5l},$$
$$c_9=(-4px+1{,}6pl)_{x=0,5l},$$

d'où $c_8=-0{,}02pl^2$, $c_9=-0{,}4pl$, et pour le tronçon *3*

$$\varphi=-0{,}02pl^2=-0{,}72B,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}=-0{,}4pl,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=0.$$

Tronçon 4:

$$Y_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}=c_{10},\quad \varphi=c_{10}x+c_{11},\quad X_y=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=c_{12}.$$

De l'égalité des valeurs limites des tronçons *3* et *4*, il ressort:

$$c_{12}=0,\ c_{10}=-0{,}4pl,\ (c_{10}x+c_{11})_{x=0,5l}=-0{,}02pl^2,$$

d'où

$$c_{11}=0{,}18pl^2,\text{ et pour le tronçon } 4$$

$$\varphi=-0{,}4plx+0{,}18pl^2,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}=-0{,}4pl,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=0.$$

Tronçon 5:

$$Y_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=-p,\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x}=-px+c_{13},$$
$$\varphi=-0{,}5px^2+c_{13}x+c_{14}.$$
$$X_y=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=c_{15}.$$

De l'égalité des valeurs limites des tronçons *4* et *5*, il ressort :

$$(-px + c_{13})_{x=0,4l} = -0,4pl;$$

$$(-0,5px^2 + c_{13}x + c_{14})_{x=0,4l} = (-0,4plx + 0,18pl^2)_{x=0,4l},$$

d'où

$$c_{13} = 0,\ c_{14} = 0,10pl^2,\ c_{15} = 0, \text{ et pour le tronçon } 5$$

$$\varphi = -0,5px^2 + 0,10pl^2, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -px, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0.$$

Pour $x = 0$ $\varphi = 3,6B$,
pour $x = l/6$ $\varphi = 3,1B$,
pour $x = l/3$ $\varphi = 1,6B$.

Les valeurs de la fonction φ au-delà du contour se déterminent à l'aide des formules (5.41) :
suivant le bord inférieur

$$\varphi_y = \varphi_n + 2\Delta y\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_v = \varphi_n$$

$$\left[\text{vu que } \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_v = 0\right],$$

où φ_n est la valeur φ quelconque devant le contour ;
suivant la face latérale

$$\varphi_x = \varphi_l + 2\Delta x\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_t = \varphi_l + 2\,\frac{l}{6}\,(-0,4pl) = \varphi_l - 4,8B,$$

où φ_l est la valeur φ quelconque devant le contour ;
suivant le bord supérieur

$$\varphi_y = \varphi_n + 2\Delta y\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_v = \varphi_n,$$

où φ_n est la valeur φ quelconque devant le contour.

Les valeurs de la fonction sur le contour et au-delà du contour sont données sur la figure 44.

En appliquant les équations (5.39′) aux nœuds isolés, il vient :
nœud 1

$$20\varphi_1 - 8\,(3,6B + \varphi_4 + \varphi_2 + \varphi_2) + 2\,(\varphi_5 + 3,1B + 3,1B + \varphi_5) + \\ + \varphi_7 + \varphi_1 + \varphi_3 + \varphi_3 = 0,$$

soit

$$21\varphi_1 - 16\varphi_2 + 2\varphi_3 - 8\varphi_4 + 4\varphi_5 + \varphi_7 = -16,4B;$$

nœud 2

$$20\varphi_2 - 8\,(3,1B + \varphi_5 + \varphi_3 + \varphi_1) + 2\,(\varphi_6 + 3,6B + 1,6B + \varphi_4) + \\ + \varphi_8 - 0,72B + \varphi_2 + \varphi_2 = 0,$$

soit

$$-8\varphi_1 + 22\varphi_2 - 8\varphi_3 + 2\varphi_4 - 8\varphi_5 + \varphi_8 = -15,12B,$$

etc. (pour tous les 15 nœuds montrés fig. 44).

En résolvant le système de 15 équations, on obtient:

$$\begin{array}{lll}\varphi_1 = 3{,}356B, & \varphi_2 = 2{,}885B, & \varphi_3 = 1{,}482B,\\ \varphi_4 = 2{,}906B, & \varphi_5 = 2{,}512B, & \varphi_6 = 1{,}311B,\\ \varphi_7 = 2{,}306B, & \varphi_8 = 2{,}024B, & \varphi_9 = 1{,}097B,\\ \varphi_{10} = 1{,}531B, & \varphi_{11} = 1{,}381B, & \varphi_{12} = 0{,}800B,\\ \varphi_{13} = 0{,}634B, & \varphi_{14} = 0{,}608B, & \varphi_{15} = 0{,}396B.\end{array}$$

La figure 45 nous donne l'image graphique de la surface des contraintes (fonctions φ).

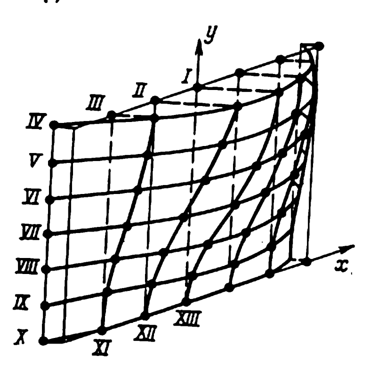


Fig. 45

Les contraintes se déterminent suivant les formules (5.40), par exemple:
point I

$$X_x^{\mathrm{I}} = \frac{(3{,}356 - 2\cdot 3{,}600 + 3{,}356)\,B}{l^2/36} = -0{,}50p \text{ (compression)};$$

point 1

$$X_x^1 = \frac{(3{,}600 - 2\cdot 3{,}356 + 2{,}885)\,B}{l^2/36} = -0{,}207p \text{ (compression)};$$

point XIII

$$X_x^{\mathrm{XIII}} = \frac{(0{,}634 - 2\cdot 0 + 0{,}634)\,B}{l^2/36} = 1{,}27p \text{ (extension)}.$$

L'épure des contraintes normales X_x suivant la section coïncidant avec l'axe y est donnée sur la figure 44.

Lors de la résolution des équations de la méthode des différences finies on peut largement recourir aux procédés modernes de calcul automatique.

CHAPITRE 6

PROBLÈME PLAN EN COORDONNÉES POLAIRES

I. ÉTAT PLAN DE CONTRAINTE

$$Z_z = Z_r = Z_\beta = e_{zr} = e_{z\beta} = 0, \qquad e_{zz} = -\frac{\sigma}{E}(R_r + B_\beta).$$

Les équations dans ce chapitre s'obtiennent comme un cas particulier des équations correspondantes établies en coordonnées cylindriques (1.1b, 2.1b, etc.).

1. Équations d'équilibre

$$\frac{\partial R_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial R_\beta}{\partial\beta}+\frac{R_r-R_\beta}{r}+R=0 \quad \left(=\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial\tau^2}\right);$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial B_\beta}{\partial\beta}+\frac{2B_r}{r}+B=0 \quad \left(=\rho\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial\tau^2}\right). \qquad (6.1)$$

2. Équations géométriques

$$\left.\begin{aligned} e_{rr}&=\frac{\partial u_r}{\partial r}, \qquad e_{\beta\beta}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_\beta}{\partial\beta}+\frac{u_r}{r},\\ e_{r\beta}&=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_r}{\partial\beta}+\frac{\partial u_\beta}{\partial r}-\frac{u_\beta}{r}.\end{aligned}\right\} \qquad (6.2)$$

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial e_{\beta\beta}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2 e_{rr}}{\partial\beta^2}-\frac{\partial e_{rr}}{\partial r}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2(re_{r\beta})}{\partial r\,\partial\beta}. \qquad (6.3)$$

3. Équations physiques

$$e_{rr}=\frac{1}{E}(R_r-\sigma B_\beta), \quad e_{\beta\beta}=\frac{1}{E}(B_\beta-\sigma R_r), \quad e_{r\beta}=\frac{2(1+\sigma)}{E}R_\beta. \qquad (6.4)$$

$$R_r=\frac{E}{1-\sigma^2}(e_{rr}+\sigma e_{\beta\beta}), \quad B_\beta=\frac{E}{1-\sigma^2}(e_{\beta\beta}+\sigma e_{rr}),$$

$$R_\beta=\frac{E}{2(1+\sigma)}e_{r\beta}. \qquad (6.5)$$

4. Équations fondamentales exprimées en fonction des contraintes

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial R_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial R_\beta}{\partial\beta}+\frac{R_r-B_\beta}{r}+R&=0,\\ \frac{\partial B_r}{\partial r}-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial B_\beta}{\partial\beta}+\frac{2B_r}{r}+B&=0,\\ \nabla^2(R_r+B_\beta)&=0,\end{aligned}\right\} \qquad (6.6)$$

où

$$\nabla^2(\ldots)=\frac{\partial^2(\ldots)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial(\ldots)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2(\ldots)}{\partial\beta^2}.$$

5. Équations fondamentales exprimées en fonction des déplacements

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r^2}+\frac{1-\sigma}{2r^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)u_r+\\
&+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1+\sigma}{2r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}-\frac{3-\sigma}{2r^2}\right)u_\beta+\frac{1-\sigma^2}{E}R=0;\\
&\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}+\frac{3-\sigma}{1-\sigma}\cdot\frac{1}{r^2}\right)u_r+\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}-\right.\\
&\left.-\frac{1}{r^2}+\frac{2}{1-\sigma}\cdot\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)u_\beta+\frac{2(1+\sigma)}{E}B=0.
\end{aligned}\right\}\tag{6.7}$$

En effectuant la substitution des variables suivant la formule

$$r=e^t\ (t=\mathrm{Log}\,r),\tag{6.8}$$

on peut réduire les équations (6.7) aux équations avec coefficients constants:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-1+\frac{1-\sigma}{2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)u_r+\\
&+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1+\sigma}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}-\frac{3-\sigma}{2}\right)u_\beta+\frac{1-\sigma^2}{E}e^{2t}R(t)=0;\\
&\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\cdot\frac{\partial}{\partial t}+\frac{3-\sigma}{1-\sigma}\right)u_r+\\
&+\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-1+\frac{2}{1-\sigma}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)u_\beta+\frac{2(1+\sigma)}{E}e^{2t}B(t)=0.
\end{aligned}\right\}\tag{6.9}$$

II. DÉFORMATION PLANE

$$e_{zz}=e_{zr}=e_{r\beta}=Z_r=Z_\beta=0,\qquad Z_z=\sigma(R_r+B_\beta).$$

Dans le cas d'une déformation plane il faut dans toutes les équations du point I remplacer

$$\sigma \text{ par } \sigma_1=\frac{\sigma}{1-\sigma},\qquad \text{et}\qquad E \text{ par } E_1=\frac{E}{1-\sigma^2}.$$

III. RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS FONDAMENTALES

1. Résolution à l'aide des fonctions déplacements-contraintes

On peut adopter pour solution des équations homogènes (6.7) la forme proposée par B. Galerkine:

$$\left.\begin{aligned}
u_r&=-\frac{1}{2G}\left[(1+\sigma)\frac{\partial\varphi}{\partial r}-2(\cos\beta\nabla^2\varphi_1+\sin\beta\nabla^2\varphi_2)\right]+\\
&\qquad+a\sin\beta+b\cos\beta,\\
u_\beta&=-\frac{1}{2G}\left[\frac{1+\sigma}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}-2(\sin\beta\nabla^2\varphi_1-\cos\beta\nabla^2\varphi_2)\right]+\\
&\qquad+a\cos\beta-b\sin\beta+cr,
\end{aligned}\right\}\tag{6.10}$$

où φ_i sont des fonctions biharmoniques quelconques:

$$\varphi=\cos\beta\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}-\frac{\sin\beta}{r}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta}+\sin\beta\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}+\frac{\cos\beta}{r}\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial\beta},$$

a, *b* et *c* étant des constantes caractérisant le déplacement du corps solide.

La solution générale ($R = B = 0$) des équations (6.6) à l'aide de la fonction des contraintes $\varphi(r, \beta)$ sera obtenue en exprimant les contraintes au moyen des formules:

$$\left.\begin{aligned}R_r&=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2},\quad B_\beta=\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2},\\ B_r&=R_\beta=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)=\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial\beta}.\end{aligned}\right\}\tag{6.11}$$

Si les contraintes sont définies sous la forme (6.11), le système d'équations (6.6) se réduit à l'équation biharmonique

$$\nabla^2\nabla^2\varphi=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)^2\varphi=0.\tag{6.12}$$

On obtient une large classe de fonctions biharmoniques φ à partir des fonctions harmoniques ψ au moyen des transformations

$$\varphi = r\psi\cos\beta,\ r\psi\sin\beta\ \text{et}\ r^2\psi.$$

Des solutions particulières connues de l'équation biharmonique (6.12) on indiquera les suivantes:

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(r,\beta)=A_0{}^{*)}+B_0\beta+A\operatorname{Log}r+Br^2\operatorname{Log}r+Cr^2+\\&+Dr\beta{}^{\cos}_{\sin}\beta+\Big[(A_1r{}^{*)}+B_1r^3+C_1r^{-1}+D_1r\operatorname{Log}r){}^{\sin}_{\cos}\beta-\\&-\frac{2D_1}{1-\sigma}r\beta{}^{\cos}_{\sin}\beta{}^{**)}\Big]+\sum_{m=2,3}^{\infty}(A_mr^m+B_mr^{m+2}+C_mr^{-m}+\\&+D_mr^{-m+2}){}^{\sin}_{\cos}m\beta+\sum_{m=2,3}^{\infty}r^m[A_m\cos m\beta+\\&+B_m\sin m\beta+C_m\cos(m-2)\beta+D_m\sin(m-2)\beta].\end{aligned}\right\}\tag{6.13}$$

Au cas de problèmes à symétrie polaire au lieu de l'équation (6.12), on a l'équation:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\right)^2\varphi=\frac{d^4\varphi}{dr^4}+\frac{2}{r}\cdot\frac{d^3\varphi}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\cdot\frac{d\varphi}{dr}=0,\tag{6.14}$$

---

*) Les grandeurs A_0 et A_1 n'influent pas sur l'état de contrainte et peuvent être négligées.

**) Ce terme est pris au cas d'un anneau fermé dans le but d'obtention de déplacements univoques; dans l'équation (6.13) il figure pour représenter l'état de contrainte plan.

dont la solution générale est :

$$\varphi = A \operatorname{Log} r + Br^2 \operatorname{Log} r + Cr^2 + D. \qquad (6.15)$$

Les contraintes se déterminent selon les formules :

$$\left.\begin{aligned} R_r &= \frac{1}{r}\cdot\frac{d\varphi}{dr} = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2\operatorname{Log} r) + 2C, \\ B_\beta &= \frac{d^2\varphi}{dr^2} = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2\operatorname{Log} r) + 2C, \\ B_r &= R_\beta = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6.16)$$

2. Emploi de la variable complexe [20]

D'après la figure 46, on a :

$$u_x = u_r \cos\beta - u_\beta \sin\beta,\quad u_y = u_r \sin\beta + u_\beta \cos\beta, \qquad (6.17)$$

d'où

$$u_x + iu_y = u_r(\cos\beta + i\sin\beta) + iu_\beta(\cos\beta + i\sin\beta) = (u_r + iu\beta)e^{i\beta}.$$

Pour un état de contrainte plan, selon la condition (5.20), il vient

$$u_r + iu_\beta = e^{-i\beta}\left\{\frac{3-\sigma}{E}\psi(z) - \frac{1+\sigma}{E}\left[\overline{z\psi'(z)} + \overline{\chi'(z)}\right]\right\}. \qquad (6.18)$$

En reportant dans le second membre de la formule (6.18) $z = re^{i\beta}$ et $\bar{z} = re^{-i\beta}$, puis en séparant la partie réelle de la partie

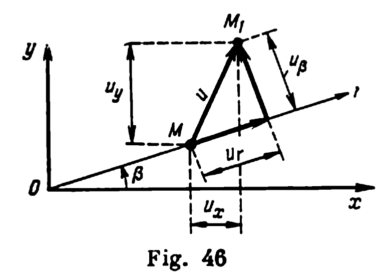


Fig. 46

imaginaire, on obtient les expressions u_r et u_β en coordonnées polaires.

D'après les formules

$$\begin{aligned} R_r &= X_x \cos^2\beta + Y_y \sin^2\beta + X_y \sin 2\beta, \\ B_\beta &= X_x \sin^2\beta + Y_y \cos^2\beta - X_y \sin 2\beta, \\ R_\beta &= (Y_y - X_x)\sin\beta\cos\beta + X_y(\cos^2\beta - \sin^2\beta), \end{aligned}$$

on obtient les expressions

$$\begin{aligned} R_r + B_\beta &= X_x + Y_y, \\ B_\beta - R_r + 2iR_\beta &= (Y_y - X_x + 2iX_y)\, e^{2i\beta}, \end{aligned}$$

d'où, compte tenu de (5.21), il vient

$$R_r + B_\beta = 2\,[\psi'(z) + \overline{\psi'(z)}] = 4Re\psi'(z), \tag{6.19}$$

$$B_\beta - R_r + 2iR_\beta = 2\,[\bar{z}\psi''(z) + \chi''(z)]\, e^{2i\beta}. \tag{6.20}$$

En soustrayant l'expression (6.20) de (6.19), il vient

$$R_r - iR_\beta = \psi'(z) + \overline{\psi'(z)} - [\bar{z}\psi''(z) + \chi''(z)]e^{2i\beta}. \tag{6.21}$$

3. Utilisation de solutions homogènes limites

$$\left.\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1+\sigma}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial t} - \frac{3-\sigma}{2}\right) f_1 + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 1 + \frac{2}{1-\sigma}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right) f_2 + \\ &\qquad + a\sin\beta + b\cos\beta, \\ u_\beta &= \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1-\sigma}{2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right) f_1 - \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\cdot\frac{\partial}{\partial t} + \frac{3-\sigma}{1-\sigma}\right) f_2 + \\ &\qquad + a\cos\beta - b\sin\beta + ce^t, \end{aligned}\right\} \tag{6.22}$$

où $f_i = f_i(\beta, t)$ sont des fonctions vérifiant l'équation

$$\frac{\partial^4 f}{\partial t^4} + 2\frac{\partial^4 f}{\partial t^2\,\partial\beta^2} + \frac{\partial^4\beta}{\partial\beta^4} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + f = 0. \tag{6.23}$$

La solution particulière de l'équation (6.23) peut être établie sous la forme:
pour un domaine en coin

$$f = B(\beta)\, e^{kt},$$

d'où

$$\begin{aligned} f(\beta, r) = r^k\,[A_k\cos(k-1)\beta + B_k\sin(k-1)\beta + \\ + C_k\cos(k+1)\beta + D_k\sin(k+1)\beta]; \end{aligned} \tag{6.24}$$

pour un domaine annulaire non fermé

$$f = T(t)^{\sin}_{\cos} k\beta,$$

d'où

$$f(\beta, r) = (A_k r^{k+1} + B_k r^{-k-1} + C_k r^{k-1} + D_k r^{-k+1})^{\sin}_{\cos} k\beta, \tag{6.25}$$

où k est un paramètre indéterminé,
A_k, B_k, C_k, D_k des constantes arbitraires.

Les déplacements seront égaux à :
dans le premier cas

$$\left.\begin{aligned}
u_r = \frac{r^k}{2}[(1+\sigma)k-(3-\sigma)]\{(k-1)[B_k\cos(k-1)\beta - \\
- A_k\sin(k-1)\beta] + (k+1)[D_k\cos(k+1)\beta - \\
- C_k\sin(k+1)\beta]\} + a\sin\beta + b\cos\beta, \\
u_\beta = -\frac{r^k}{2}\{(k-1)[(1+\sigma)k+(3-\sigma)][A_k\cos(k-1)\beta + \\
+ B_k\sin(k-1)\beta] + (k+1)[(1+\sigma)k-(3-\sigma)]\times \\
\times[C_k\cos(k+1)\beta + D_k\sin(k+1)\beta]\} + \\
+ a\cos\beta - b\sin\beta - cr;
\end{aligned}\right\} \quad (6.26)$$

dans le second cas

$$\left.\begin{aligned}
u_r = \pm\frac{k}{2}\{(1+\sigma)(k-2)A_kr^{k+1} - [(1+\sigma)k+4]B_kr^{-k-1} + \\
+ [(1+\sigma)k-4]C_kr^{k-1} - (1+\sigma)(k+2)D_kr^{-k+1}\}{}^{\cos}_{\sin}k\beta + \\
+ a\sin\beta + b\cos\beta, \\
u_\beta = -\frac{k}{2}\{[(1+\sigma)k+4]A_kr^{k+1} + [(1+\sigma)k+4]B_kr^{-k-1} + \\
+ [(1+\sigma)k-4]C_kr^{k-1} + [(1+\sigma)k-4]D_kr^{-k+1}\}{}^{\sin}_{\cos}k\beta + \\
+ a\cos\beta - b\sin\beta - cr.
\end{aligned}\right\} \quad (6.27)$$

Ensuite, d'après les formules (6.5), on établit les expressions pour les contraintes. C'est ainsi que pour le premier cas :

$$\left.\begin{aligned}
R_r = Gkr^{k-1}\{(1+\sigma)(k-3)(k-1)[B_k\cos(k-1)\beta - \\
- A_k\sin(k-1)\beta] + (k+1)[(1+\sigma)k-(3-\sigma)]\times \\
\times[D_k\cos(k+1)\beta - C_k\sin(k+1)\beta]\}, \\
B_\beta = -Gk(k+1)r^{k-1}\{(1+\sigma)(k-1)\times \\
\times[B_k\cos(k-1)\beta - A_k\sin(k-1)\beta] + [(1+\sigma)k- \\
-(3-\sigma)][D_k\cos(k+1)\beta - C_k\sin(k+1)\beta]\}, \\
B_r = R_\beta = -Gkr^{k-1}\{(1+\sigma)(k-1)^2[A_k\cos(k-1)\beta + \\
+ B_k\sin(k-1)\beta] + (k+1)[(1+\sigma)k-(3-\sigma)]\times \\
\times[C_k\cos(k+1)\beta + D_k\sin(k+1)\beta]\}.
\end{aligned}\right\} \quad (6.28)$$

Possédant les valeurs des déplacements (6.26) et (6.27) et des contraintes (6.28) on est en mesure de formuler toutes solutions homogènes limites.

Problèmes

6.1. Problème de Lamé (1852).

Un long cylindre creux est soumis à des pressions normales extérieure p_0 et intérieure p_i qui sont uniformément réparties suivant la surface latérale (fig. 47).

Trouver les contraintes et les déplacements.

En vertu de la symétrie polaire et les deux conditions aux limites

$$R_{r=a} = -p_i \text{ et } R_{r=b} = -p_0 \qquad \text{(a)}$$

écrivons la fonction des contraintes (6.15) sous la forme

$$\varphi = A \operatorname{Log} r + Cr^2 \ *).$$

Selon les formules (6.16), les contraintes seront:

$$R_r = \frac{A}{r^2} + 2C, \quad B_\beta = -\frac{A}{r^2} + 2C, \quad R_\beta = B_r = 0.$$

En utilisant les conditions aux limites (a), il vient:

$$A = \frac{a^2 b^2 (p_0 - p_i)}{b^2 - a^2}, \quad 2C = \frac{a^2 p_i - b^2 p_0}{b^2 - a^2},$$

d'où

$$R_r = \frac{1}{b^2 - a^2}\left[a^2 p_i - b^2 p_0 + \frac{a^2 b^2}{r^2}(p_0 - p_i)\right],$$

$$B_\beta = \frac{1}{b^2 - a^2}\left[a^2 p_i - b^2 p_0 - \frac{a^2 b^2}{r^2}(p_0 - p_i)\right].$$

Pour déterminer les déplacements u_r ($u_\beta = 0$), il faut intégrer les équations (6.4) compte tenu des équations (6.2) et des relations

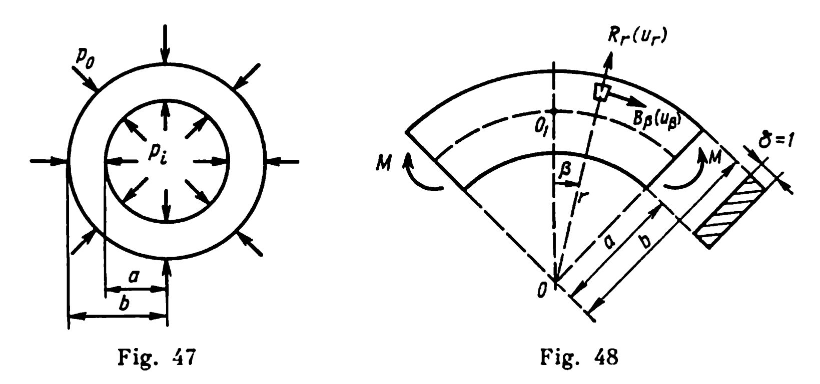


Fig. 47 Fig. 48

(5.9). Les équations (6.4) pour le problème considéré prennent la forme:

$$E_1 \frac{du_r}{dr} = R_r - \sigma_1 B_\beta, \quad E_1 \frac{u_r}{r} = B_\beta - \sigma_1 R_r. \qquad \text{(b)}$$

---

*) Dans le cas d'un cylindre plein $\varphi = Cr^2$, $R_r = B_\beta = -p_0$, $R_\beta = B_r = 0$.

Des équations (b), il ressort

$$u_r = \frac{1}{2G(b^2-a^2)}\left[(1-2\sigma)(a^2p_i-b^2p_0)\,r+\frac{a^2b^2}{r}(p_i-p_0)\right].$$

6.2. Problème de Golovine (1881).

Un barreau circulaire plat de rayon extérieur b et intérieur a en forme d'un rectangle étroit ($\delta = 1$) est fléchi au moyen des moments M agissant à ses extrémités (fig. 48).

Déterminer les contraintes et les déplacements.

Comme les contraintes ne dépendent pas de l'angle polaire β, on écrit, selon la formule (6.15), la fonction des contraintes sous la forme $\varphi = A \operatorname{Log} r + Br^2 \operatorname{Log} r + Cr^2$.

Les conditions aux limites du problème prennent la forme:

$$R_{r=a}=0, \quad R_{r=b}=0, \quad \int_a^b B_\beta\,dr=0, \quad \int_a^b B_\beta r\,dr=M. \tag{a}$$

En développant les équations (a), il vient:

$$\left.\begin{aligned} A/a^2+B(1+2\operatorname{Log} a)+2C&=0,\\ A/b^2+B(1+2\operatorname{Log} b)+2C&=0,\\ A\operatorname{Log}\frac{b}{a}+B(b^2\operatorname{Log} b-a^2\operatorname{Log} a)+C(b^2-a^2)&=M.\end{aligned}\right\} \tag{b}$$

La troisième condition de (a) est vérifiée si les deux premières le sont également.

Résolvons les équations (b):

$$A=-\frac{4M}{N}a^2b^2\operatorname{Log}\frac{b}{a}, \quad B=-\frac{2M}{N}(b^2-a^2),$$

$$C=\frac{M}{N}[b^2-a^2+2(b^2\operatorname{Log} b-a^2\operatorname{Log} a)],$$

où

$$N=(b^2-a^2)-4a^2b^2\operatorname{Log}^2\frac{b}{a}.$$

Les contraintes seront égales à:

$$R_r=-\frac{4M}{N}\left(\frac{a^2b^2}{r^2}\operatorname{Log}\frac{b}{a}+b^2\operatorname{Log}\frac{r}{b}+a^2\operatorname{Log}\frac{a}{r}\right),$$

$$B_\beta=-\frac{4M}{N}\left(-\frac{a^2b^2}{r^2}\operatorname{Log}\frac{b}{a}+b^2\operatorname{Log}\frac{r}{b}+a^2\operatorname{Log}\frac{a}{r}+b^2-a^2\right).$$

La solution approchée obtenue au moyen des formules de la résistance des matériaux, où les contraintes B_β varient suivant la loi hyperbolique, coïncide de façon satisfaisante avec la solution exacte trouvée.

Pour déterminer les déplacements il faut intégrer les équations (6.4):

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u_r}{\partial r}= \\
&=\frac{1}{E}\left\{\frac{1+\sigma}{r^2}A+[2(1-\sigma)\operatorname{Log} r+1-3\sigma]B+2(1-\sigma)C\right\}, \\
&\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_\beta}{\partial \beta}+\frac{u_r}{r}= \\
&=\frac{1}{E}\left\{-\frac{1+\sigma}{r^2}A+[2(1-\sigma)\operatorname{Log} r+3-\sigma]B+2(1-\sigma)C\right\}, \\
&\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_r}{\partial \beta}+\frac{\partial u_\beta}{\partial r}-\frac{u_\beta}{r}=0.
\end{aligned}\right\} \quad (c)$$

Intégrons successivement la première et la seconde équations de (c)

$$u_r=\frac{1}{E}\left\{-\frac{1+\sigma}{r}A+[2(1-\sigma)\operatorname{Log} r-1-\sigma]rB+2(1-\sigma)rC\right\}+f_1'(\beta),$$

$$u_\beta=\frac{4B}{E}r\beta-f_1(\beta)+f_2(r).$$

En reportant les valeurs trouvées des déplacements dans la troisième équation de (c), on obtient deux équations:

$$f_2'(r)-\frac{1}{r}f_2(r)=0, \quad f_1''(\beta)+f_1(\beta)=0,$$

d'où

$$f_1(\beta)=b\sin\beta-a\cos\beta,\; f_2(r)=cr.$$

Les déplacements seront en définitive égaux à:

$$u_r=\frac{1}{E}\left\{-\frac{1+\sigma}{r}A+[2(1-\sigma)\operatorname{Log} r-1-\sigma]rB+2(1-\sigma)rC\right\}+$$
$$+a\sin\beta+b\cos\beta;$$
$$u_\beta=\frac{4B}{E}r\beta+a\cos\beta-b\sin\beta+cr$$

[comparer avec la formule (6.10)].

Pour déterminer les constantes arbitraires a, b et c, il faut fixer le barreau de manière à exclure son déplacement comme corps solide, et poser, par exemple, au point O_1

$$u_r=u_\beta=\frac{\partial u_\beta}{\partial r}=0.$$

Le déplacement u_β est composé de deux composantes: le déplacement et la rotation de la section de l'angle $4B\beta/E$ par rapport au centre C, pris pour un corps solide. Donc, au cas d'une flexion

pure, les sections transversales demeurent planes (hypothèse Bernoulli).

6.3. Problème de Mitchell (1900).

Déterminer l'état de contrainte dans un coin fin ($\delta = 1$), illimité, d'angle 2α, au sommet duquel est appliquée une force P formant avec l'axe du coin un angle β_1 (fig. 49).

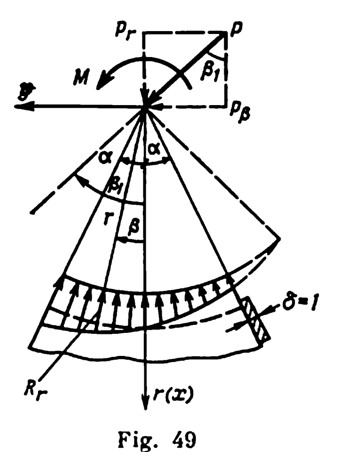


Fig. 49

Définissons la fonction des contraintes sous la forme:

$$\varphi = Ar\,\beta\sin\beta + Br\,\beta\cos\beta.$$

Les conditions aux limites du problème ont la forme:

$$\text{pour } \beta = \pm\alpha,\ B_\beta = R_\beta = 0,$$
$$\text{pour } r \to 0,\ \sum X = \sum Y = 0.$$

Selon les équations (6.11) les contraintes seront égales à:

$$R_r = (2A\cos\beta)/r - (2B\sin\beta)/r,\ B_\beta = R_\beta = 0.$$

Donc les conditions aux limites sur les faces du coin sont vérifiées et les conditions permettant de déterminer les constantes arbitraires sont:

$$\sum X = \int_{-\alpha}^{\alpha} R_r \cos\beta r\,d\beta + P\cos\beta_1 = 0,$$

$$\sum X = \int_{-\alpha}^{\alpha} R_r \sin\beta r\,d\beta + P\sin\beta_1 = 0,$$

d'où

$$A = -\frac{2P\cos\beta_1}{2\alpha+\sin 2\alpha} = -\frac{2P_r}{2\alpha+\sin 2\alpha},$$

$$B = \frac{2P\sin\beta_1}{2\alpha-\sin 2\alpha} = \frac{2P_\beta}{2\alpha-\sin 2\alpha}.$$

On obtient en définitive

$$R_r = -\frac{2P}{r}\left(\frac{\cos\beta_1\cos\beta}{2\alpha+\sin 2\alpha} + \frac{\sin\beta_1\sin\beta}{2\alpha-\sin 2\alpha}\right).$$

Quand $r \to 0$ les contraintes $R_r \to \infty$, vu qu'on a fait l'hypothèse de l'application de la force au point.

Pour un petit angle 2α les contraintes obtenues à l'aide des formules de la résistance des matériaux sont proches de celles fournies par le problème donné.

▶ Déterminer l'état de contrainte si au sommet du coin est appliqué un moment M (voir fig. 49).

Conseil. La fonction des contraintes doit être prise sous la forme $\varphi = A\beta + B \sin 2\beta$.

Réponse : $R_r = -\frac{2C}{r^2} \sin 2\beta$, $B_\beta = 0$, $R_\beta = \frac{C}{r^2} (\cos 2\beta - \cos 2\alpha)$,

où C est déduit de la condition

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} rBr\, d\beta = M$$

et est égal à

$$C = M/(\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha).$$

▶ Déterminer l'état de contrainte dans un coin fin et infini d'angle α, dont la face inclinée est soumise à une charge verticale uniforme d'intensité q (fig. 50).

Conseil. La fonction des contraintes doit être prise sous la forme [voir (6.13)]

$$\varphi = r^2 (A_2 \cos 2\beta + B_2 \sin 2\beta + C_2\beta + D_2).$$

Réponse : $R_r = \frac{q}{\sin \alpha} \cos^2 \beta$, $B_\beta = -\frac{q}{\sin\alpha} \sin^2 \beta$, $B_r = R_\beta = \frac{q}{2 \sin \alpha} \sin 2\beta$.

▶ Déterminer l'état de contrainte dans un coin fin et infini d'angle α pour deux types de charge (fig. 50) : 1) au cas de pression

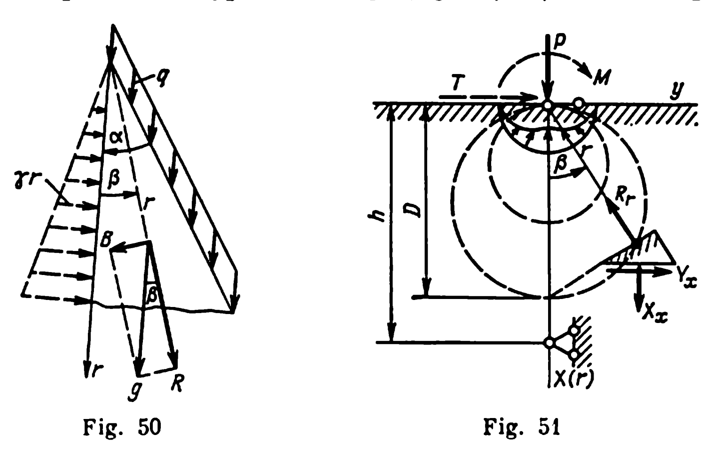


Fig. 50 Fig. 51

d'un liquide de poids spécifique γ sur la face verticale ; 2) au cas où le matériau du coin a pour poids spécifique g.

Conseil. Dans les deux cas la fonction des contraintes doit être prise [voir (6.13)] sous la forme

$$\varphi = r^2 (A_3 \cos 3\beta + B_3 \sin 3\beta + C_3 \cos \beta + D_3 \sin \beta),$$

les contraintes seront déterminées d'après les formules (6.11) et pour tenir compte du poids spécifique, on ajoutera aux expressions obtenues les valeurs particulières des contraintes fournies par les formules:

$$\overline{R}_r = -gr \cos \beta, \ \overline{B}_\beta = -gr \cos \beta, \ \overline{R}_\beta = \overline{B}_r = 0,$$

tirées des équations d'équilibre (6.6) quand

$$R = g \cos \beta \text{ et } B = -g \sin \beta.$$

6.4. Problème de Flaman (1892).

Déterminer l'état de contrainte et de déformation dans un demi-plan élastique $x \geqslant 0$ sollicité par la force ponctuelle P perpendiculaire à la limite $x = 0$ (fig. 51).

Ce problème est un cas particulier du problème (6.3) si l'on pose $\alpha = \pi/2$ et $\beta_1 = 0$. Cette hypothèse prise en compte, il vient

$$R_r = -\frac{2P \cos \beta}{\pi r}, \quad B_\beta = R_\beta = B_r = 0$$

qui est le cas d'une distribution élémentaire radiale des contraintes (Mitchell, 1900).

Sur toute circonférence de diamètre quelconque D tangente à la ligne limite au point d'application de la force (voir fig. 51),

$$D = r/\cos \beta \text{ et } R_r = -2P/(\pi D) = \text{const.}$$

La contrainte tangentielle principale en tous les points de la circonférence est:

$$\tau_{\max} = | R_r - B_\beta |/2 = P/(\pi D) = \text{const},$$

aussi dans les études optiques des modèles plans près des points d'application des forces, on voit sur l'écran des circonférences semblables (c'est-à-dire des isobares ou lignes des contraintes égales). Pour une déformation plane les équations (6.4) seront

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{2(1-\sigma^2)P}{\pi E} \cdot \frac{\cos\beta}{r}, \\ &\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} = \frac{2\sigma(1+\sigma)P}{\pi E} \cdot \frac{\cos\beta}{r}, \\ &\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial r} - \frac{u_\beta}{r} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

En intégrant successivement la première et la seconde de ces équations, il vient

$$u_r = -\frac{2(1-\sigma^2)P}{\pi E} \cos\beta \operatorname{Log} r + f'(\beta);$$

$$u_\beta = \frac{2\sigma(1+\sigma)P}{\pi E} \sin\beta + \frac{2(1-\sigma^2)P}{\pi E} \sin\beta \operatorname{Log} r - f(\beta) + f_1(r).$$

Pour trouver les fonctions inconnues $f(\beta)$ et $f_1(r)$ reportons les valeurs des déplacements dans la troisième équation de (a) qui, après certaines transformations, devient:

$$f''(\beta)+f(\beta)+\frac{2(1+\sigma)(1-2\sigma)P}{\pi E}\sin\beta=f_1(r)-rf_1'(r)$$

et se décompose en deux équations:

$$f''(\beta)+f(\beta)=-\frac{2(1+\sigma)(1-2\sigma)P}{\pi E}\sin\beta;$$

$$f_1'(r)-\frac{1}{r}f_1(r)=0\ ^{*)}.$$

Les fonctions inconnues seront égales à:

$$f(\beta)=C_1\cos\beta+C_2\sin\beta+\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)P}{\pi E}\beta\cos\beta,\quad f_1(r)=C_3r.$$

En définitive, les déplacements seront:

$$u_r=-\frac{2(1-\sigma^2)P}{\pi E}\operatorname{Log}r\cos\beta-\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)P}{\pi E}\beta\sin\beta+$$
$$+\left[C_2+\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)P}{\pi E}\right]\cos\beta-C_1\sin\beta,$$
$$u_\beta=\frac{2(1-\sigma^2)P}{\pi E}\operatorname{Log}r\sin\beta-\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)P}{\pi E}\beta\cos\beta-$$
$$-C_1\cos\beta-\left[C_2-\frac{2\sigma(1+\sigma)P}{\pi E}\right]\sin\beta+C_3r.$$

Pour déterminer les constantes arbitraires C_i, il faut fixer le demi-plan de manière à exclure son mouvement comme corps solide, par exemple (voir fig. 51):
pour $\beta=0$, $u_\beta=0$,
pour $r=h$ et $\beta=0$, $u_r=0$.
Dans ce cas

$$C_1=C_3=0,$$
$$C_2=\frac{2(1-\sigma^2)P}{\pi E}\operatorname{Log}h-\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)P}{\pi E},$$

et les déplacements se déterminant d'après les formules:

$$u_r=-\frac{2(1-\sigma^2)P}{\pi E}\left[\operatorname{Log}\frac{r}{h}\cos\beta+\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}\beta\sin\beta\right],$$
$$u_\beta=\frac{2(1-\sigma^2)P}{\pi E}\left\{\left[\operatorname{Log}\frac{r}{h}+\frac{1}{2(1-\sigma)}\right]\sin\beta-\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}\beta\cos\beta\right\}.$$

---

*) L'égalisation des deux parties de l'équation à zéro et non pas à une constante arbitraire s'explique par le fait que cette constante ne figure pas dans l'expression des déplacements.

Les points de la ligne limite ($\beta=\pm\pi/2$) subissent les déplacements :

$$u_r\,|_{\beta=\pm\pi/2}=u_y=-\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)P}{2E},$$

$$u_{\beta=\pm\frac{\pi}{2}}=u_x=\pm\frac{2(1-\sigma^2)P}{\pi E}\operatorname{Log}\frac{y}{h}\pm\frac{(1+\sigma)P}{\pi E}.$$

D'après la figure 51 les contraintes sur les éléments de surface parallèles aux axes x et y seront égales à :

$$X_x=R_r\cos^2\beta=-\frac{2P}{\pi}\cdot\frac{x^3}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{2P}{\pi}\cdot\frac{\cos^3\beta}{r};$$

$$Y_y=R_r\sin^2\beta=-\frac{2P}{\pi}\cdot\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{2P}{\pi}\cdot\frac{\cos\beta\sin^2\beta}{r};$$

$$Y_x=X_y=\frac{R_r}{2}\sin 2\beta=-\frac{2P}{\pi}\cdot\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{2P}{\pi}\cdot\frac{\cos^2\beta\sin\beta}{r}.$$

▶ Déterminer les contraintes dans le demi-plan sollicité par un moment (voir fig. 51).

Réponse : $R_r=-\frac{2M}{\pi r^2}\sin 2\beta,\quad B_\beta=0,$

$$R_\beta=B_r=\frac{2M}{\pi r^2}\cos^2\beta$$

(voir problème 6.3).

▶ Problème de Cerruti (1882).

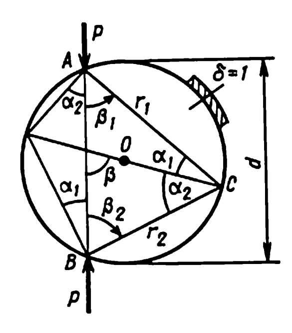


Fig. 52

Déterminer les contraintes et les déplacements dans un demi-plan élastique soumis à l'origine des coordonnées à une force T dirigée suivant l'axe y (voir fig. 51).

Réponse :

$$R_r=-\frac{2T}{\pi\delta}\frac{\sin\beta}{r},\qquad B_\beta=R_\beta=B_r=0,$$

$$u_r=\frac{T}{\pi\delta E}\left[2\operatorname{Log}\frac{h}{r}\sin\beta-(1-\sigma)\beta\cos\beta\right],$$

$$u_\beta=\frac{T}{\pi\delta E}\left[(1+\sigma)\cos\beta-2\operatorname{Log}\frac{h}{r}\cos\beta-(1-\sigma)\beta\sin\beta\right].$$

6.5. Problème de Hertz (1883).

Déterminer l'état de contrainte d'un disque circulaire comprimé par deux forces P ne passant pas par le centre (fig. 52).

Le problème se résout par superposition de trois états.

1) Le point A constitue un pôle, d'où émanent les compressions radiales engendrant les contraintes

$$R_{r_1} = -\frac{2P}{\pi}\cdot\frac{\cos\beta_1}{r_1}, \quad B_{\beta_1} = R_{\beta_1} = 0.$$

2) Le point B est l'autre pôle, d'où émane la compression radiale engendrant les contraintes

$$R_{r_2} = -\frac{2P}{\pi}\cdot\frac{\cos\beta_2}{r_2}, \quad B_{\beta_2} = R_{\beta_2} = 0.$$

3) Le disque est sollicité à la traction uniforme omnidirectionnelle p pour laquelle

$$R_{r_3} = B_{\beta_3} = p, \quad R_{\beta_3} = 0$$

(voir problème 6.1).

Au cas de l'action simultanée des trois charges, on a au point C les contraintes:

$$R_r = p - \frac{2P}{\pi}\left(\frac{1}{r_1}\cos\beta_1\cos^2\alpha_1 + \frac{1}{r_2}\cos\beta_2\cos^2\alpha_2\right);$$

$$B_\beta = p - \frac{2P}{\pi}\left(\frac{1}{r_1}\cos\beta_1\sin^2\alpha_1 + \frac{1}{r_2}\cos\beta_2\sin^2\alpha_2\right);$$

$$B_r = -\frac{2P}{\pi}\left(\frac{1}{r_1}\cos\beta_1\sin\alpha_1\cos\alpha_1 - \frac{1}{r_2}\cos\beta_2\sin\alpha_2\cos\alpha_2\right).$$

Compte tenu de ce que

$$\alpha_1 + \beta_2 = \pi/2, \quad \alpha_2 + \beta_1 = \pi/2,$$
$$r_1 = d\cos\alpha_1 = d\sin\beta_2, \quad r_2 = d\cos\alpha_2 = d\sin\beta_1,$$

où d est le diamètre du cercle, on obtient en définitive:

$$R_r = p - \frac{2P}{\pi d}\sin(\beta_1 + \beta_2);$$

$$B_\beta = p - \frac{2P}{\pi d}\operatorname{ctg}\beta_1\operatorname{ctg}\beta_2\sin(\beta_1 + \beta_2);$$

$$R_\beta = B_r = 0.$$

Pour que le cercle ABC soit en tous les points, sauf A et B, non soumis aux contraintes radiales R_r, il faut poser

$$p = \frac{2P}{\pi d}\sin(\beta_1 + \beta_2),$$

où $\sin(\beta_1 + \beta_2)$ est une constante.

▶ Déterminer l'état de contrainte d'un disque circulaire comprimé par deux forces P passant par le centre du disque et construire l'épure des contraintes normales suivant la section diamétrale perpendiculaire aux forces (voir problème (3.1)).

6.6. Déterminer l'état de contrainte et de déformation au sein d'un cylindre de révolution creux de grande longueur reposant sur un support parfaitement rigide ($u_\beta = 0$) et lisse ($R_\beta = 0$) sollicité

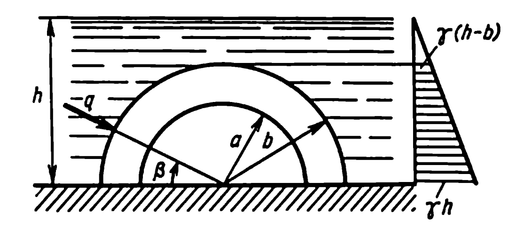


Fig. 53

par une charge hydrostatique $q = \gamma (h - b \sin \beta)$, où γ est le poids spécifique du liquide (fig. 53).

Définissons la fonction des contraintes sous la forme (6.13):

$$\varphi = A_0 r^2 + B_0 \operatorname{Log} r +$$

$$+ \sum_{m=2,4}^{\infty} (A_m r^m + B_m r^{m+2} + C_m r^{-m} + D_m r^{-m+2}) \cos m\beta. \qquad \text{(a)}$$

Les conditions aux limites du problème sont:

pour $r = b$, $R_r = -\gamma (h - b \sin \beta)$, $B_r = 0$;
pour $r = a$, $R_r = 0$, $B_r = 0$;
pour $\beta = 0$ ou π, $R_\beta = 0$, $u_\beta = 0$.

En développant $\sin \beta$ dans l'intervalle $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$ suivant la formule

$$\sin \beta = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=2,4,\ldots}^{\infty} \frac{\cos m\beta}{(m-1)(m+1)}$$

et en écrivant les contraintes d'après les formules (6.11):

$$R_r = 2A_0 + \frac{B_0}{r^2} - \sum_{2,4,\ldots}^{\infty} [m(m-1) A_m r^{m-2} + (m-2)(m+1) B_m r^m +$$
$$+ m(m+1) C_m r^{-m-2} + (m+2)(m-1) D_m r^{-m}] \cos m\beta,$$

$$B_\beta = 2A_0 - \frac{B_0}{r^2} + \sum_{2,4,\ldots}^{\infty} [m(m-1) A_m r^{m-2} + (m+2)(m+1) B_m r^m +$$
$$+ m(m+1) C_m r^{-m-2} + (m+2)(m-1) D_m r^{-m}] \cos m\beta,$$

$$R_\beta = B_r = \sum_{2,4,\ldots}^{\infty} m\,[(m-1)A_m r^{m-2} + (m+1)B_m r^m -$$
$$-(m+1)C_m r^{-m-2} - (m-1)D_m r^{-m}]\sin m\beta,$$

on obtient des quatre premières conditions aux limites les valeurs de toutes les constantes arbitraires de la formule (a):

$$A_0 = \frac{\gamma(2b-\pi h)\,b^2}{2(b^2-a^2)},\quad B_0 = -\frac{\gamma(2b-\pi h)\,a^2b^2}{b^2-a^2},$$
$$A_m = \frac{4\gamma}{\Delta}(m+1)[mC-(m-1)D]\,\alpha^{-m+1}a^{-m+3},$$
$$B_m = \frac{4\gamma}{\Delta}(m-1)[mD-(m+1)C]\,\alpha^{-m+1}a^{-m+1},$$
$$C_m = \frac{4\gamma}{\Delta}(m-1)\,D\alpha^{-m+1}a^{m+3},$$
$$D_m = -\frac{4\gamma}{\Delta}(m+1)\,D\alpha^{-m+1}a^{m+1},$$

où $\alpha = b/a$,

$$\Delta = \pi(CB-mAD)(m-1)^2(m+1)^2,$$
$$A = (m-1)\alpha^2-(m-2)-\alpha^{-2(m+1)},$$
$$B = m^2\alpha^{-2}-(m-2)-(m+2)\alpha^{-2m},$$
$$C = -(m-1)\alpha^{-2}+m-\alpha^{-2(m+1)},$$
$$D = -m\alpha^{-2}+(m+1)+\alpha^{-2m}.$$

Les déplacements se déterminent à partir des équations (6.4) compte tenu de (6.2). En intégrant les deux premières équations de (6.4) et en égalant à zéro les fonctions arbitraires *), il vient:

$$E_1u_r = 2(1-\sigma_1)A_0r-(1+\sigma_1)\frac{B_0}{r}-\sum_{2,4,\ldots}^{\infty}\{(1+\sigma_1)mA_mr^{m-1}+$$
$$+[m-2+\sigma_1(m+2)]B_mr^{m+1}-(1+\sigma_1)mC_mr^{-m-1}-$$
$$-[m+2+\sigma_1(m-2)]D_mr^{-m+1}\}\cos m\beta;$$

$$E_1u_\beta = \sum_{2,4,\ldots}^{\infty}\{(1+\sigma)mA_mr^{m-1}+[(1+\sigma_1)m+4]B_mr^{m+1}+$$
$$+(1+\sigma_1)mC_mr^{-m-1}+[(1+\sigma_1)m-4]D_mr^{-m+1}\}\sin m\beta.$$

Ainsi donc,les conditions aux limites sont vérifiées par rapport à β.

Au cas de pressions uniformes extérieure p_0 et intérieure p_i sur le demi-cylindre on aboutit, à condition que $p_0b \geqslant p_ia$, au problème connu de Lamé.

*) La troisième équation de (6.4), $e_{r\beta} = \dfrac{2(1+\sigma_1)}{E_1}R_\beta$, dans la fonction des contraintes en forme de (a) se vérifie identiquement.

▶ Trouver l'état de contrainte et de déformation au sein d'un demi-cylindre plein ($a = 0$) de rayon b reposant sur un support parfaitement rigide et lisse et soumis à l'action d'une charge hydrostatique (voir fig. 53).

Conseil. La fonction des contraintes doit être prise sous la forme:

$$\varphi = A_0 r^2 + \sum_{m=2,\,4,\,\ldots}^{\infty} (A_m r^m + B_m r^{m+2}) \cos m\beta.$$

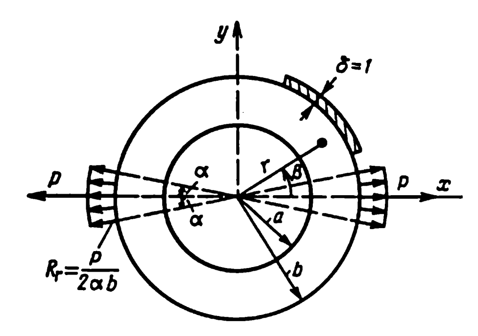


Fig. 54

▶ Etudier l'état de contrainte dans un mince ($\delta = 1$) disque annulaire sollicité par deux forces de traction P (fig. 54).

Conseils: 1. La force ponctuelle doit être remplacée par une charge uniformément répartie $q = P/(2ab)$ sur le tronçon $2\alpha b$, où α est le petit angle.
2. La fonction des contraintes sera prise sous la forme (a).

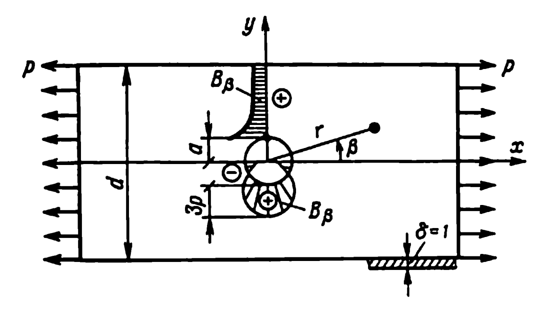


Fig. 55

6.7. Problème de Kirsch (1898).

Etudier l'état de contrainte dans une plaque mince ($\delta = 1$), rectangulaire, uniformément tendue et possédant une petite perforation circulaire (fig. 55).

Les contraintes engendrées par la petite perforation présentent la nature de contraintes locales qui s'amortissent rapidement avec l'éloignement de la perforation.

Les contraintes au sein de la partie pleine de la plaque peuvent être définies au moyen de la fonction des contraintes

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} py^2 = \frac{1}{2} pr^2 \sin^2 \beta = \frac{1}{4} pr^2 (1 - \cos 2\beta),$$

pour laquelle

$$X_x = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} = p, \ Y_y = X_y = 0.$$

En utilisant pour la solution du problème donné la fonction des contraintes φ et des grandes valeurs de r, on doit obtenir les mêmes contraintes que pour la fonction φ_0.

En conformité avec les formules (6.13) on définit la fonction des contraintes sous la forme:

$$\varphi = A \operatorname{Log} r + Br^2 \operatorname{Log} r + Cr^2 + (A_2 r^2 + B_2 r^4 + C_2 r^{-2} + \\ + D_2) \cos 2\beta.$$

Pour éviter l'accroissement des contraintes quand r augmente, on pose $B = B_2 = 0$, tandis que pour obtenir les mêmes contraintes avec de grandes valeurs de r que pour la fonction φ_0, il faut que $C = p/4$ et $A_2 = -p/4$. Donc la fonction des contraintes est

$$\varphi = A \operatorname{Log} r + pr^2/4 + (-pr^2/4 + C_2 r^{-2} + D_2) \cos 2\beta,$$

tandis que les contraintes sont:

$$R_r = A/r^2 + p/2 + (p/2 - 6C_2/r^4 - 4D_2/r^2) \cos 2\beta,$$
$$B_\beta = - A/r^2 + p/2 + (-p/2 + 6C_2/r^4) \cos 2\beta;$$
$$R_\beta = B_r = - (p/2 + 6C_2/r^4 + 2D_2/r^2) \sin 2\beta.$$

Les constantes arbitraires se déterminent des conditions: pour $r = a$, $R_r = B_r = 0$ *).

Ces conditions une fois posées, il vient:

$$A = -pa^2/2, \ C_2 = -pa^4/4, \ D_2 = pa^2/2.$$

En définitive les contraintes seront:

$$R_r = \frac{p}{2} \left[1 - \frac{a^2}{r^2} + \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2}\right) \cos 2\beta \right];$$
$$B_\beta = \frac{p}{2} \left[1 + \frac{a^2}{r^2} - \left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cos 2\beta \right];$$
$$R_\beta = B_r = -\frac{p}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2}\right) \sin 2\beta.$$

Comme le corps n'est pas d'un seul tenant, il est nécessaire de vérifier l'univocité des déplacements. Les calculs montrent que les

*) Il ressort des équations (6.11) qu'il est possible d'établir les conditions également pour la fonction φ: pour $r = a$, $\varphi = 0$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$.

déplacements sont univoques; ce qui confirme l'exactitude de la solution.

Sur la figure 55 est donnée l'épure B_β:
pour $\beta = \pm\pi/2$, $B_\beta = 3p$,
pour $\beta = 0$ ou π, $B_\beta = -p$.

Donc les contraintes croîtront (se concentreront) près du bord de la perforation.

Si la largeur de la plaque d n'est pas très grande, comparée au diamètre de la perforation $2a$, mais, toutefois, est plus grande que $4a$,

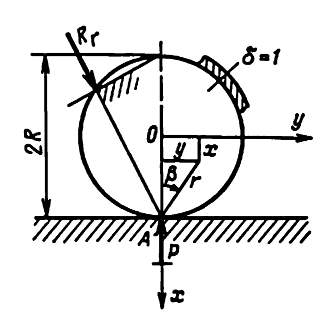


Fig. 56

la valeur maximale de B_β peut être déterminée d'après la formule

$$\max B_\beta \approx 3pd/(d-a).$$

6.8. Problème de Mitchell (1900) [4].

Déterminer l'état de contrainte dans un disque circulaire lourd et mince ($\delta = 1$) reposant sur un plan parfaitement rigide et horizontal (fig. 56).

Au point d'appui du disque la force est:

$$P = \pi R^2 \gamma,$$

où γ est le poids spécifique du matériau.

Le problème se résout par superposition de deux états.

1) Le point A est un pôle, d'où émane la compression radiale engendrant les contraintes:

$$R_r = -\frac{2P}{\pi}\frac{\cos\beta}{r} = -\frac{2\gamma R^2}{r}\cos\beta,\ B_\beta = R_\beta = B_r = 0,$$

tandis que sur le bord du disque, quand $r = 2R\cos\beta$, les contraintes sont égales (problème 6.4) à

$$R_r = -\gamma R,\ X_x = -\gamma R\cos^2\beta,\ Y_y = -\gamma R\sin^2\beta,\ X_y = -\frac{\gamma R}{2}\sin 2\beta.$$

2) Pour éliminer les contraintes trouvées, il faut y ajouter le système de contraintes:

$$X_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{\gamma}{2}(R-x),\ X_y=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}=\frac{\gamma}{2}y,\ Y_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{\gamma}{2}(R+x),$$

qui se déterminent à partir de la fonction des contraintes

$$\varphi=\frac{\gamma}{4}\left[\frac{x^3}{3}+R(x^2+y^2)-y^2x\right].$$

Compte tenu de ce que $y = r\sin\beta$, $x = R - r\cos\beta$, il est aisé, quand $r = 2R\cos\beta$, d'obtenir sur le bord du disque les contraintes inverses de celles mentionnées au point 1.

Dans chaque section horizontale se manifeste une pression radiale dirigée vers le point A et égale à

$$\frac{\gamma}{2r}(4R^2\cos^2\beta-r^2).$$

6.9. Voir [20].

Une plaque infinie est affaiblie par un trou circulaire sur le contour duquel pour $z = ae^{i\beta}$, où a est le rayon du trou, s'exercent les contraintes R_r et B_r.

Etudier l'état de contrainte.

Les fonctions analytiques $\psi'(z)$ et $\chi''(z)$ de la solution de (6.21) doivent être développées en série de puissance de manière que pour $r = \infty$ elles soient finies. Ces fonctions prendront la forme:

$$\psi'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nz^{-n},\ \chi''(z)=\sum_{n=0}^{\infty}B_nz^{-n}, \qquad \text{(a)}$$

où A_n et B_n sont des constantes complexes.

Les formules (6.19) et (6.21) montrent qu'à l'infini les contraintes sont déterminées par la constante B_0 et la partie réelle de la constante A_0. La partie imaginaire de la constante A_0 n'exerce aucune influence sur l'état de contrainte.

En intégrant (a) par rapport à z, il vient

$$\psi(z)=A_0z+A_1\operatorname{Log}z-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{A_nz^{-n+1}}{n-1}+C_1,$$

$$\chi'(z)=B_0z+B_1\operatorname{Log}z-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_nz^{-n+1}}{n-1}+C_2,$$

où C_i sont des constantes complexes.

En tenant compte des relations:

$$\overline{\psi'(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}\bar{A}_n\bar{z}^{-n},\ \overline{\chi'(z)}=\bar{B}_0\bar{z}+\bar{B}_1\operatorname{Log}\bar{z}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\bar{B}_n\bar{z}^{-n+1}}{n-1}+\bar{C}_2,$$

on obtient de la formule (6.18)

$$u_r+iu_\beta=e^{-i\beta}\Big[\frac{3-\sigma}{E}\Big(A_0z+A_1\operatorname{Log}z-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{A_nz^{-n+1}}{n-1}+C_1\Big)-$$

$$-\frac{1+\sigma}{E}\Big(\bar{A}_0z+r^2\sum_{n=1}^{\infty}\bar{A}_n\bar{z}^{-(n+1)}\Big)-$$

$$-\frac{1+\sigma}{E}\Big(\bar{B}_0\bar{z}+\bar{B}_1\operatorname{Log}\bar{z}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\bar{B}_n\bar{z}^{-n+1}}{n-1}+\bar{C}_2\Big)\Big]. \tag{b}$$

Posons $z = re^{i\beta}$, alors $\operatorname{Log} z = \operatorname{Log} r + i\beta$.

Cette fonction n'est pas univoque par rapport à β. L'accroissement $u_r + iu_\beta$ dans le contournement de la perforation sera

$$2\pi ie^{-i\beta}\Big(\frac{3-\sigma}{E}A_1+\frac{1+\sigma}{E}\bar{B}_1\Big),$$

et la condition d'univocité des déplacements devient

$$(3-\sigma)A_1+(1+\sigma)\bar{B}_1=0,$$

d'où

$$A_1=-\frac{1+\sigma}{3-\sigma}\bar{B}_1. \tag{c}$$

Puisque les contraintes R_r et B_r sont définies pour $r = a$, l'expression $(R_r-iB_r)_{r=a}$ peut être développée en série complexe de Fourier [32]

$$(R_r-iB_r)_{r=a}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_ne^{in\beta}, \tag{d}$$

où les coefficients C_n se déterminent d'après la formule

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[R_r(\beta)-B_r(\beta)]_{r=a}\,e^{-in\beta}d\beta,$$

$$n=0,\ 1,\ -1,\ -2,\ \ldots$$

Reportant dans la solution (6.21) les séries (a) et (d) et, tenant compte de la condition sur le contour ($r = a$), il vient

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{a^n} e^{-in\beta} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{A}_n}{a^n} e^{in\beta} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nA_n}{a^n} e^{-in\beta} -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{a^n} e^{-i(n-2)\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(1+n) A_n - \frac{B_{n+2}}{a^2}\right] \frac{e^{-in\beta}}{a^n} -$$

$$- \frac{B_1}{a} e^{i\beta} - B_0 e^{i2\beta} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{A}_n}{a^n} e^{in\beta}. \qquad \text{(e)}$$

En confrontant les coefficients de $e^{in\beta}$ aux mêmes exposants dans les deux membres de l'équation (e), on obtient:

$$\left.\begin{aligned} & A_0 + \bar{A}_0 - \frac{B_2}{a^2} = C_0, \ \frac{\bar{A}_1}{a} - \frac{B_1}{a} = C_1, \\ & \frac{\bar{A}_2}{a^2} - B_0 = C_2, \ \frac{\bar{A}_n}{a^n} = C_n \text{ pour } n \geqslant 3, \\ & \frac{1+n}{a^n} A_n - \frac{B_{n+2}}{a^{n+2}} = C_{-n} \text{ pour } n \geqslant 1. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(f)}$$

En posant que $A_0 + \bar{A}_0$ et B_0 sont les caractéristiques de l'état de contrainte à l'infini, on admet qu'elles sont connues. La grandeur de la partie imaginaire de la constante A_0 correspond au déplacement du corps parfaitement solide (b), elle peut donc être posée égale à zéro. Les constantes se déterminent d'après les formules:

$$A_0 + \bar{A}_0 = 2A_0 \text{ et } \bar{A}_1 = -\frac{1+\sigma}{3-\sigma} B_1 \text{ [voir formule (c)].}$$

Ensuite, d'après les équations (f) et (c), on obtient:

$$B_1 = -\frac{3-\sigma}{4} aC_1, \ \ A_1 = \frac{1+\sigma}{4} a\bar{C}_1,$$

$$B_2 = 2A_0 a^2 - C_0 a^2, \ A_2 = \bar{B}_0 a^2 + \bar{C}_2 a^2,$$

pour $n \geqslant 3$

$$B_n = (n-1)\, a^2 A_{n-2} - a^n C_{-n+2}, \ A_n = \bar{C}_n a^n.$$

La solution complète du problème devient possible si sont données la répartition des contraintes suivant le contour circulaire et les conditions à l'infini.

▶ Déterminer, en utilisant la méthode donnée, l'état de contrainte et de déformation dans une dalle épaisse affaiblie en sa partie moyenne par un petit trou circulaire de rayon a et soumise à une traction uniforme de contraintes p dirigées suivant l'axe x (voir fig. 55).

Réponse: 1. Pour les contraintes voir la formule (b) du problème (6.7).
2. Pour les déplacements, d'après la formule (b) quand $C_1 = C_2 = 0$, on aura:

$$u_r = \frac{p(1+\sigma)}{2Er}\left[\frac{1-\sigma}{1+\sigma}r^2 + a^2 + \left(\frac{4a^2}{1+\sigma} + r^2 - \frac{a^4}{r^2}\right)\cos 2\beta\right];$$

$$u_\beta = -\frac{p(1+\sigma)}{2Er}\left(\frac{1-\sigma}{1+\sigma}2a^2 + r^2 + \frac{a^4}{r^2}\right)\sin 2\beta.$$

▶ Trouver la répartition des contraintes dans une plaque infinie avec un trou circulaire si, le long du bord du trou, quand $r = a$, $R_r = -p$ et $B_r = 0$. Les tensions sont nulles à l'infini.

Réponse: $\psi'(z) = 0$, $\chi''(z) = pa^2/z^2$,

$$R_r = -pa^2/r^2,\ B_\beta = pa^2/r^2,\ B_r = R_\beta = 0,$$
$$u_r = pa^2(1+\sigma)/(Er),\ u_\beta = 0.$$

▶ Chercher les contraintes dans un mince disque annulaire de rayon extérieur b et de rayon intérieur a comprimé dans sa partie épaisse par deux forces (fig. 57).

6.10. Chercher les solutions homogènes pour un coin fin fixé en un nombre fini de points de la base dans les conditions suivantes

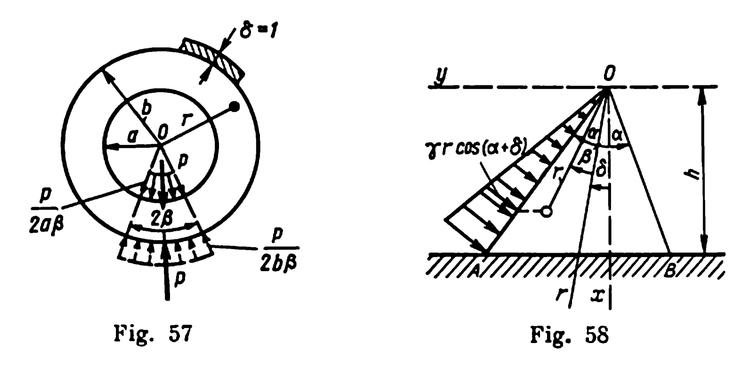


Fig. 57

Fig. 58

(fig. 58); le coin est sollicité par un liquide de poids spécifique γ; $\alpha = \pi/6 = 0{,}524$; $\delta = \pi/12 = 0{,}262$; $h = 4$ m.

Pour obtenir la solution particulière satisfaisant aux conditions aux limites inhomogènes suivant les faces OA et OB, on pose dans les équations (6.26) et (6.28) $k = 2$ et, pour simplifier l'expression, on admet que $\sigma = 0$.

Les constantes arbitraires de la solution particulière se déterminent sur la base des conditions:
pour $\beta = \alpha$, $B_\beta = -\gamma r\cos(\alpha+\delta)$, $R_\beta = 0$,
pour $\beta = -\alpha$, $B_\beta = R_\beta = 0$.

La solution homogène générale s'obtient pour des conditions aux limites homogènes suivant les faces OA et OB:
pour $\beta = \alpha$, $B_\beta = R_\beta = 0$,
pour $\beta = -\alpha$, $B_\beta = R_\beta = 0$
qui une fois développées fournissent quatre équations:

$$\left.\begin{aligned}
&(k-1)\sin(k-1)\alpha A_k - (k-1)\cos(k-1)\alpha B_k +\\
&+ (k-3)\sin(k+1)\alpha C_k - (k-3)\cos(k+1)\alpha D_k = 0;\\
&(k-1)^2\cos(k-1)\alpha A_k + (k-1)^2\sin(k-1)\alpha B_k +\\
&+ (k-3)(k+1)\cos(k+1)\alpha C_k + (k-3)(k+1)\times\\
&\times\sin(k+1)\alpha D_k = 0;\\
&(k-1)\sin(k-1)\alpha A_k + (k-1)\cos(k-1)\alpha B_k +\\
&+ (k-3)\sin(k+1)\alpha C_k + (k-3)\cos(k+1)\alpha D_k = 0;\\
&(k-1)^2\cos(k-1)\alpha A_k - (k-1)^2\sin(k-1)\alpha B_k +\\
&+ (k-3)(k+1)\cos(k+1)\alpha C_k -\\
&- (k-3)(k+1)\sin(k+1)\alpha D_k = 0.
\end{aligned}\right\} \quad \text{(a)}$$

Pour que les constantes A_k, B_k, C_k et D_k ne soient pas nulles le déterminant $\Delta(k)$ du système (a) doit s'annuler. En explicitant le déterminant, on obtient l'équation transcendante pour de déterminant k:

$$\sin 2k\alpha = \pm k \sin 2\alpha, \quad \text{(b)}$$

posant

$$k = a \pm ib,$$

portant dans (b) et en séparant les parties réelles et imaginaires, on a les équations permettant de déterminer a et b:

$$\sin 2a\alpha \operatorname{ch} 2b\alpha = \pm a \sin 2\alpha; \quad \cos 2a\alpha \operatorname{sh} 2b\alpha = \pm b \sin 2\alpha$$

ou, pour la valeur de

$$a = \pm \frac{\operatorname{cth}|2b\alpha|}{\sin 2\alpha}\sqrt{\operatorname{sh}^2 2b\alpha - b^2\sin^2 2\alpha}, \quad \text{(c)}$$

$$\cos\frac{2}{\sin 2\alpha}\left(\operatorname{cth}|2b\alpha|\sqrt{\operatorname{sh}^2 2b\alpha - b^2\sin^2 2\alpha}\right)\alpha = \pm \sin 2\alpha \frac{b}{\operatorname{sh} 2b\alpha}. \quad \text{(d)}$$

Pour des valeurs numériques du problème ($\alpha = 0{,}524$) les équations (d) et (c) deviennent

$$a = \pm 1{,}155 \operatorname{cth}|1{,}05b|\sqrt{\operatorname{sh}^2 1{,}05b - 0{,}75b^2}, \quad \text{(e)}$$

$$\cos 1{,}21\left(\operatorname{cth}|1{,}05b|\sqrt{\operatorname{sh}^2 1{,}05b - 0{,}75b^2}\right) = \pm 0{,}866b/\operatorname{sh} 1{,}05b. \quad \text{(f)}$$

La courbe représentative de l'équation (f) est donnée sur la figure 59. Les valeurs de certaines de ses racines sont données ci-dessous:

m	$k_m = a_m \pm ib_m$
1-4	$\pm 4{,}051 \pm i1{,}94$
5-8	$\pm 7{,}178 \pm i2{,}45$
. . . .	. . . .
. . . .	. . . .

Pour la multitude de paramètres $k_m = a_m \pm ib_m$ tirés des équations (a) et (f), on détermine les constantes qui leur correspondent d'après les formules:

$$A_k = F_k\Delta_1(k),\quad B_k = F_k\Delta_2(k),\quad C_k = F_k\Delta_3(k),\quad D_k = F_k\Delta_4(k),$$

où Δ_i (k) sont les compléments algébriques des éléments de la ligne ou de la colonne quelconques du déterminant *); F_k des coefficients arbitraires de proportionnalité.

En prenant dans la solution générale tout nombre fini de termes, on peut satisfaire aux conditions aux limites suivant le plan d'appui AB en un nombre fini quelconque de points.

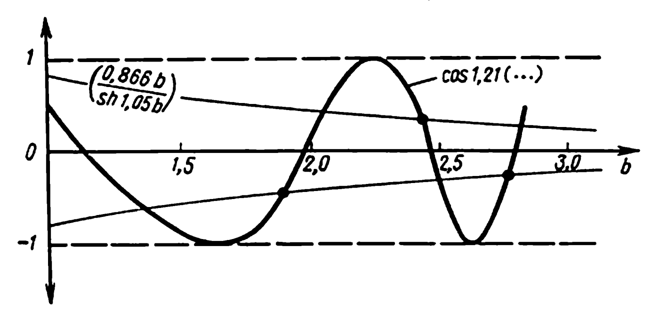


Fig. 59

Les calculs numériques d'un coin élastique reposant sur des supports rigide et élastique, avec l'utilisation de la méthode analysée et d'un calculateur électronique, sont réalisés dans les publications de N. Borissov [33, 34].

CHAPITRE 7

TORSION DES BARRES PRISMATIQUES ET CYLINDRIQUES

I. TORSION PURE DE BARRES DE SECTION CONSTANTE

1. Hypothèses

Dans la solution du problème sur la torsion pure des barres, on se réfère à la méthode « semi-inverse » de Saint-Venant en posant

$$X_x = Y_y = Z_z = X_y = 0,$$

où z est l'axe de la tige.

*) Pour simplifier l'écriture, on omet pour k l'indice m.

2. Équations fondamentales

Avec les hypothèses adoptées les équations théoriques seront:
Equations statistiques [voir (1.1a)]

$$\frac{\partial X_z}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial Y_z}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}=0. \tag{7.1}$$

Conditions aux limites (1.2)
suivant la surface latérale

$$Z_x \cos(\nu, x) + Z_y \cos(\nu, y) = 0, \tag{7.2}$$

aux extrémités ($z = 0$ et $z = l$)

$$\left.\begin{aligned} &\iint_F X_z\,dF=0, \quad \iint_F Y_z\,dF=0, \\ &\iint_F (Y_z x - X_z y)\,dF = M_z, \end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

où M_z est le moment de torsion.

Equations géometriques (2.1a), qui compte tenu de (3.1a), prennent la forme:

$$\left.\begin{aligned} e_{xx}&=\frac{\partial u_x}{\partial x}=0, & e_{xy}&=\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}=0, \\ e_{yy}&=\frac{\partial u_y}{\partial y}=0, & e_{xz}&=\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}=\frac{X_z}{G}, \\ e_{zz}&=\frac{\partial u_z}{\partial z}=0, & e_{yz}&=\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y}=\frac{Y_z}{G}, \end{aligned}\right| \tag{7.4}$$

tandis que les équations (3.4a) deviennent

$$\nabla^2 Y_z = 0, \; \nabla^2 X_z = 0. \tag{7.5}$$

3. Résolution du problème au moyen de la fonction de Prandtl

Les contraintes sont exprimées au moyen de la fonction $\Phi = \Phi(x, y)$ suivant les formules:

$$X_z=Z_x=\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad Y_z=Z_y=-\frac{\partial \Phi}{\partial x}. \tag{7.6}$$

Selon les équations (7.5)

$$\nabla^2 \Phi = C. \tag{7.7}$$

En intégrant les équations (7.4), on trouve en éliminant les termes représentant les déplacements de la barre comme corps solide:

$$u_x = -\alpha yz, \; u_y = \alpha xz, \; u_z = u_z(x, y), \tag{7.8}$$

où α est l'angle de torsion de la barre par unité de longeur.

Des deux dernières équations (7.4), on tire les valeurs des contraintes tangentielles:

$$X_z = G\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \alpha y\right), \quad Y_z = G\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \alpha x\right) \qquad (7.6')$$

et, en comparant les équations (7.6) et (7.6′), on obtient l'équation de Poisson (4.6) pour la fonction de Prandtl

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = -2\alpha G, \qquad (7.7')$$

d'où, en vertu de l'équation (7.7),

$$C = -2\alpha G.$$

La liaison du déplacement u_z avec la fonction des contraintes Φ se définit par les égalités (7.6) et (7.6′), d'où l'on tire que

$$\frac{\partial u_z}{\partial x} = \alpha y + \frac{1}{G}\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_z}{\partial y} = -\alpha x - \frac{1}{G}\frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad (7.9)$$

et

$$\nabla^2 u_z = 0.$$

Les équations (7.9), compte tenu des équations (7.7), peuvent toujours être intégrées [voir équations (4.17)-(4.21)].

La grandeur u_z traduit la mise de la section transversale hors du plan avec la déformation de la tige.

4. Propriétés de la fonction de Prandtl

De l'équation (7.2) (fig. 60)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{dx}{ds} = \frac{d\Phi}{ds} = 0,$$

et, par conséquent, sur le contour d'une barre pleine

$$\Phi(x, y) = 0. \qquad (7.10)$$

En tout point de la section la contrainte tangentielle est dirigée suivant la tangente à la courbe Φ = const qui passe par ce point

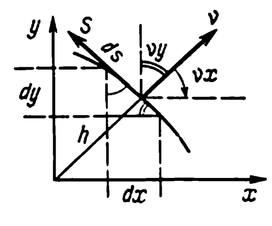


Fig. 60

et est proportionnelle au taux de variation de Φ le long de la normale à cette courbe:

$$S_z = \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}, \quad V_z = 0. \qquad (7.11)$$

En vertu du théorème sur la circulation de la contrainte tangentielle (Bredt, 1896)

$$\oint_{\Phi=C} S_z\,ds = 2\alpha G F_\Phi, \tag{7.12}$$

où $F_\Phi = \oint_{\Phi=C} hds/2$ représente l'aire de la section complète limitée par la courbe étudiée.

Selon la troisième équation (7.3)

$$M_z = 2\int F_\Phi\,d\Phi = 2\iint_F \Phi\,dF, \tag{7.13}$$

où $d\Phi = S_z d\nu$ est la différentielle de la fonction des contraintes (7.11); F l'aire de la section (y compris les perforations).

II. TORSION PURE DES BARRES RONDES (ARBRES) DE SECTION VARIABLE [28]

1. Hypothèses

Au cours de la torsion d'un arbre de section variable (fig. 61) on résout le problème en coordonnées cylindriques en faisant les hypothèses suivantes:

$$u_r = u_z = 0,\ u_\beta = u_\beta(r, z); \tag{7.14}$$

$$R_r = B_\beta = Z_z = R_z = 0. \tag{7.14'}$$

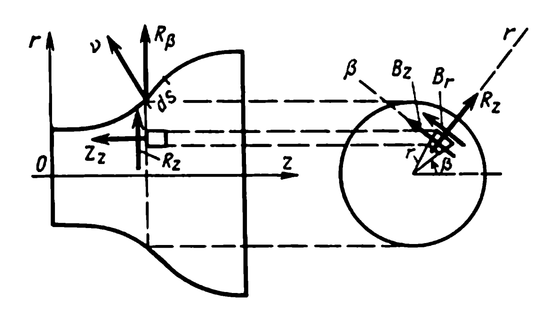


Fig. 61

2. Équations fondamentales

Compte tenu des hypothèses adoptées (7.14), les équations théoriques prennent la forme:

Equations géométriques (2.1b)

$$\left.\begin{aligned}
e_{rr}&=\frac{\partial u_r}{\partial r}=0, \quad e_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z}=0,\\
e_{\beta\beta}&=\frac{u_r}{r}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_\beta}{\partial \beta}=0,\\
e_{zr}&=\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0,\\
e_{r\beta}&=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_r}{\partial \beta}+\frac{\partial u_\beta}{\partial r}-\frac{u_\beta}{r}=\frac{\partial u_\beta}{\partial r}-\frac{u_\beta}{r},\\
e_{\beta z}&=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_z}{\partial \beta}+\frac{\partial u_\beta}{\partial z}=\frac{\partial u_\beta}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \tag{7.15}$$

Equations de la loi de Hooke

$$B_r=R_\beta=G\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial r}-\frac{u_\beta}{r}\right), \quad B_z=Z_\beta=G\,\frac{\partial u_\beta}{\partial z}. \tag{7.16}$$

Equations statiques (1.1b).

En absence de forces volumiques il ne se conserve qu'une seule des équations d'équilibre:

$$\frac{\partial B_r}{\partial r}+\frac{\partial B_z}{\partial z}+\frac{2B_r}{r}=0,$$

quant aux autres équations, elles se vérifient identiquement.

La dernière équation peut être écrite sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2B_r)+\frac{\partial}{\partial z}(r^2B_z)=0 \tag{7.17}$$

en la satisfaisant de façon identique par l'introduction de la fonction des contraintes ψ suivant la formule:

$$B_r=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad B_z=\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r}. \tag{7.18}$$

En résolvant le système des équations (7.16) et (7.18), ou bien la cinquième équation de (2.4b) (les autres équations de continuité des déformations se vérifient identiquement), il vient

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{3}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=0. \tag{7.19}$$

Si la surface latérale n'est pas soumise à l'action des forces extérieures, la contrainte tangentielle résultante est dirigée suivant la tangente au contour de la section axiale, tandis que sa projection sur la normale ν est nulle. On a dans ce cas

$$B_r\cos(\nu, r)+B_z\cos(\nu, z)=0,$$

où

$$\cos(\nu, r)=\frac{dz}{ds}, \quad \cos(\nu, z)=-\frac{dr}{ds}.$$

Avec la prise en compte des formules (7.18), il vient

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\frac{dz}{ds}+\frac{\partial\psi}{\partial r}\cdot\frac{dr}{ds}=\frac{d\psi}{ds}=0,$$

d'où il ressort que sur le contour

$$\psi = \text{const}, \tag{7.20}$$

et aux extrémités ($z=0$ et $z=l$)

$$M_z=\iint\limits_F B_z r\,dF=\int\limits_0^a\int\limits_0^{2\pi} B_z r^2\,dr\,d\beta=2\pi\int\limits_0^a r^2 B_z\,dr=$$

$$=2\pi\int\limits_0^a\frac{\partial\psi}{\partial r}\,dr=2\pi\psi\,|_0^a, \tag{7.21}$$

où a est le rayon de la section transversale considérée définie par l'équation de la génératrice.

Si la surface latérale est sollicitée par une charge p, alors

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\frac{dz}{ds}+\frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r}\cdot\frac{dr}{ds}=-p,$$

d'où

$$\frac{d\psi}{ds}=-r^2p,$$

et au lieu de la formule (7.20), on obtient

$$\psi=-\int\limits_0^s r^2p\,ds. \tag{7.22}$$

3. Résolution de l'équation différentielle de la torsion d'un arbre

Diverses modes de résolution des équations (7.19) sont possibles.

E n f o n c t i o n s d e p u i s s a n c e.

Posons

$$\psi = r^n z^m. \tag{7.23}$$

Reportant la valeur de ψ dans l'équation (7.19), on trouve $n = 4$ et $m = 1$, d'où

$$\psi = (Az+B)(Cr^4+D), \tag{7.24}$$

les contraintes prenant alors la forme :

$$B_r=-\frac{A}{r^2}(Cr^4+D),\quad B_z=4Cr(Az+B). \tag{7.25}$$

Des formules (7.25) on tire une série de cas particuliers, par exemple, quand $A=D=0$ et $B = 1$, on a la solution élémentaire du problème de torsion d'un arbre rond. Dans ce cas

$$\psi = Cr^4, \ B_r = 0, \ B_z = 4Cr,$$

et sur la base de la formule (7.21)

$$C = M_z/(2\pi a^4).$$

E n f o n c t i o n s d e B e s s e l.
Posons

$$\psi = R(r)\,Z(z),$$

où $R(r)$ est la fonction de la variable r, tandis que $Z(z)$ est celle de la variable z; ensuite, en substituant dans l'équation (7.19), il vient:

$$\frac{d^2R}{dr^2} - \frac{3}{r}\frac{dR}{dr} \pm \lambda^2 R = 0; \qquad \frac{d^2Z}{dz^2} \mp \lambda^2 Z = 0, \tag{7.26}$$

où λ est un certain nombre.

L'équation (7.26) possède les deux solutions suivantes [35]:

$$\psi = (A \operatorname{sh} \lambda z + B \operatorname{ch} \lambda z)\,[Cr^2 J_2(\lambda r) + Dr^2 Y_2(\lambda r)]; \tag{7.27}$$

$$\psi = (A \sin \lambda z + B \cos \lambda z)\,[Cr^2 I_2(\lambda r) + Dr^2 K_2(\lambda r)], \tag{7.28}$$

où $J_2(\lambda r)$ et $Y_2(\lambda r)$ sont les fonctions de Bessel de second ordre de l'argument réel, respectivement de la première et de la seconde espèce; $I_2(\lambda r)$ et $K_2(\lambda r)$ les fonctions de Bessel de second ordre de l'argument imaginaire, respectivement de la première et de la seconde espèce. Les contraintes se déterminent d'après les formules:

$$\left.\begin{aligned} B_r &= -\lambda (A \operatorname{ch} \lambda z + B \operatorname{sh} \lambda z)\,[CJ_2(\lambda r) + DY_2(\lambda r)]; \\ B_z &= \lambda (A \operatorname{sh} \lambda z + B \operatorname{ch} \lambda z)\,[CJ_1(\lambda r) + DY_1(\lambda r)] \end{aligned}\right\} \tag{7.29}$$

et

$$\left.\begin{aligned} B_r &= -\lambda (A \cos \lambda z - B \sin \lambda z)\,[CI_2(\lambda r) + DK_2(\lambda r)]; \\ B_z &= \lambda (A \sin \lambda z + B \cos \lambda z)\,[CI_1(\lambda r) + DK_1(\lambda r)], \end{aligned}\right\} \tag{7.30}$$

où J_1, Y_1, I_1, K_1 sont les fonctions de Bessel du premier ordre.

E n f o n c t i o n s d e L e g e n d r e.

L'équation différentielle de la torsion des arbres de section variable (7.19) en coordonnées curvilignes, orthogonales et isothermes *) a la forme:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r^3}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{r^3}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right) = 0, \tag{7.31}$$

*) Les coordonnées isothermes $\xi(r, z)$ et $\eta(r, z)$ satisfont aux relations

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = -\frac{\partial \eta}{\partial r} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{\partial \eta}{\partial z}.$$

où ξ (r, z) et η (r, z) sont des coordonnées curvilignes, orthogonales et isothermes du plan de section axiale de l'arbre.

Les coordonnées ξ et η du plan rOz (voir fig. 61) sont liées aux coordonnées r et z par les relations:

$$r = Ce^{\xi} \sin \eta, \quad z = Ce^{\xi} \cos \eta, \tag{7.32}$$

et inversement:

$$\xi = \text{Log} \sqrt{r^2 + z^2}, \quad \eta = \text{arctg}\, r/z.$$

En posant

$$\psi = f_1(\xi) f_2(\eta),$$

où $f_1(\xi)$ est une fonction de ξ, tandis que $f_2(\eta)$ une fonction de η, puis, reportant dans l'équation (7.31), on obtient, compte tenu de (7.32), deux équations:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 f_1}{d\xi^2} - 3\frac{df_1}{d\xi} - (n-1)(n+2) f_1 = 0; \\ &\frac{d^2 f_2}{d\eta^2} - 3\,\text{ctg}\,\eta \frac{df_2}{d\eta} + (n-1)(n+2) f_2 = 0, \end{aligned} \tag{7.33}$$

où n est un certain nombre constant.

De la première équation de (7.33), en posant $f_1(\xi) = e^{m\xi}$, il vient

$$f_1(\xi) = A_n e^{(n+2)\xi} + B_n e^{(-n+1)\xi}. \tag{7.34}$$

La solution de la seconde équation (7.33) sera recherchée sous la forme

$$f_2(\eta) = \sin^2 \eta Y(\cos \eta) = (1 - \mu^2) Y(\mu), \tag{7.35}$$

où $\mu = \cos \eta$.

En reportant les valeurs de $f_2(\eta)$ dans la seconde équation de (7.33), on aboutit à l'équation de Legendre:

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dY}{d\mu}\right] + \left[n(n+1) - \frac{4}{1-\mu^2}\right] Y = 0, \tag{7.36}$$

d'où

$$Y(\mu) = (1-\mu^2)\frac{d^2 P_n(\mu)}{d\mu^2}, \tag{7.37}$$

où $P_n(\mu)$ sont les fonctions de Legendre de premier ordre, tandis que si n est un nombre entier, on aboutit aux polynômes de Legendre.

La première solution de l'équation (7.31) est

$$\psi_n = [A_n e^{(n+2)\xi} + B_n e^{(-n+1)\xi}] \sin^4 \eta \frac{d^2 P_n(\mu)}{d\mu^2}. \tag{7.38}$$

La seconde solution est de la forme

$$\psi_n = [A_n e^{(n+2)\xi} + B_n e^{(-n+1)\xi}] \sin^4 \eta \frac{d^2 Q_n(\mu)}{d\mu^2}, \tag{7.39}$$

où $Q_n(\mu)$ sont les fonctions de Legendre de deuxième ordre.

Quand $n = 0$ et $n = 1$ les solutions s'obtiennent directement de la seconde équation (7.33):

pour $n = 0$

$$f_2 = C_0 \cos \eta + D_0 (1 + \cos^2 \eta);$$

pour $n = 1$

$$f_2 = C_1 + D_1 (3 \cos \eta - \cos^3 \eta).$$

Donc, les solutions (7.38) et (7.39) se complètent de deux valeurs de la fonction ψ:

$$\left.\begin{aligned} \psi_0 &= (A_0 e^{2\xi} + B_0 e^{\xi}) [C_0 \cos \eta + D_0 (1 + \cos^2 \eta)]; \\ \psi_1 &= (A_1 e^{3\xi} + B_1) [C_1 + D_1 (3 \cos \eta - \cos^3 \eta)]. \end{aligned}\right\} \quad (7.40)$$

Au cas de coordonnées elliptiques ξ et η qui sont liées aux coordonnées r et z par les relations:

$$r = a \operatorname{sh} \xi \sin \eta, \quad z = a \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad (7.41)$$

en posant

$$\psi = f_1(\xi) f_2(\eta),$$

on aboutit à la solution sous la forme:

$$\left.\begin{aligned} \psi_0 &= [A_0 \operatorname{ch} \xi + B_0 (1 + \operatorname{ch}^2 \xi)] [C_0 \cos \eta + D_0 (1 + \cos^2 \eta)]; \\ \psi_1 &= [A_1 + B_1 (3 \operatorname{ch} \xi - \operatorname{ch}^3 \xi] [C_1 + D_1 (3 \cos \eta - \cos^3 \eta)]; \\ \psi_n &= \operatorname{sh}^4 \xi \sin^4 \eta \left[A_n \frac{d^2 P_n(\theta)}{d\theta^2} + B_n \frac{d^2 Q_n(\theta)}{d\theta^2}\right] \times \\ &\quad \times \left[C_n \frac{d^2 P_n(\mu)}{d\mu^2} + D_n \frac{d^2 Q_n(\mu)}{d\mu^2}\right], \end{aligned}\right\} \quad (7.42)$$

où $\mu = \cos \eta$, $\theta = \operatorname{ch} \xi$;

$P_n (\ldots)$ sont les fonctions de Legendre de première ordre;
$Q_n (\ldots)$ les fonctions de Legendre de deuxième ordre.

Si l'on intervertit les rôles des coordonnées r et z, c'est-à-dire si l'on place les pôles du système de coordonnées elliptique non pas sur l'axe de l'arbre Oz mais sur l'axe Or, on aura entre r, z et ξ, η la liaison:

$$r = a \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad z = a \operatorname{sh} \xi \sin \eta \quad (7.43)$$

et la solution (7.42) prendra la forme:

$$\left.\begin{aligned} \psi_0 &= [A_0 \operatorname{sh} \xi + B_0 (1 - \operatorname{sh}^2 \xi)] [C_0 \sin \eta + D_0 (1 + \sin^2 \eta)]; \\ \psi_1 &= [A_1 + B_1 (3 \operatorname{sh} \xi + \operatorname{sh}^3 \xi)] [C_1 + D_1 (3 \sin \eta - \sin^3 \eta)]; \\ \psi_n &= i^n \operatorname{ch}^4 \xi \cos^4 \eta \left[A_n \frac{d^2 P_n(\theta)}{d\theta^2} + B_n \frac{d^2 Q_n(\theta)}{d\theta^2}\right] \times \\ &\quad \times \left[C_n \frac{d^2 P_n(\mu)}{d\mu^2} + D_n \frac{d^2 Q_n(\mu)}{d\mu^2}\right], \end{aligned}\right\} \quad (7.44)$$

où $\theta = i \operatorname{sh} \xi$, $\mu = \sin \eta$.

Problèmes

7.1. Une barre de section elliptique $f(x, y) = x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$ est sollicitée à la torsion de moment M_z.

Etudier l'état de contrainte de la barre.

Définissons la fonction des contraintes sous la forme

$$\Phi = Af(x, y) = A(x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1),$$

où A est un facteur inconnu.

En reportant la fonction Φ dans l'équation (7.7), il vient

$$2A/a^2 + 2A/b^2 = -2\alpha G,$$

d'où

$$A = -\alpha G a^2 b^2/(a^2 + b^2),$$

tandis que la fonction des contraintes devient

$$\Phi = \frac{\alpha G a^2 b^2}{a^2 + b^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right). \qquad \text{(a)}$$

Les contraintes se déterminent d'après les formules (7.6):

$$X_z = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{2\alpha G a^2}{a^2 + b^2} y, \quad Y_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{2\alpha G b^2}{a^2 + b^2} x.$$

La figure 62 donne les épures des contraintes.

Pour déterminer M_z, on utilise la formule (7.13). D'après la formule (a) l'aire de l'ellipse est:

$$F_\Phi = \pi ab\left(1 - \frac{a^2 + b^2}{\alpha G a^2 b^2}\right) = \pi ab\left(1 - \frac{\Phi}{\Phi_{\max}}\right),$$

où quand $x = y = 0$

$$\Phi_{\max} = \alpha G a^2 b^2/(a^2 + b^2).$$

Selon la formule (7.13)

$$M_z = 2\int_0^{\Phi_{\max}} F_\Phi \, d\Phi = 2\pi ab \int_0^{\Phi_{\max}} (1 - \Phi/\Phi_{\max})\, d\Phi =$$

$$= \pi ab \Phi_{\max} = \pi \alpha G a^3 b^3/(a^2 + b^2).$$

La contrainte maximale aux points $(0, \pm b)$ est

$$\max X_z = 2M_z/(\pi a b^2).$$

Des équations (7.9) on tire

$$u_z = -\alpha \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} xy. \qquad \text{(b)}$$

Ainsi donc dans une barre de section elliptique les sections transversales, après torsion, ne restent pas planes, mais se transforment en surface dont les horizontales sont des hyperboles isocèles possédant comme asymptotes les axes Ox et Oy (fig. 63).

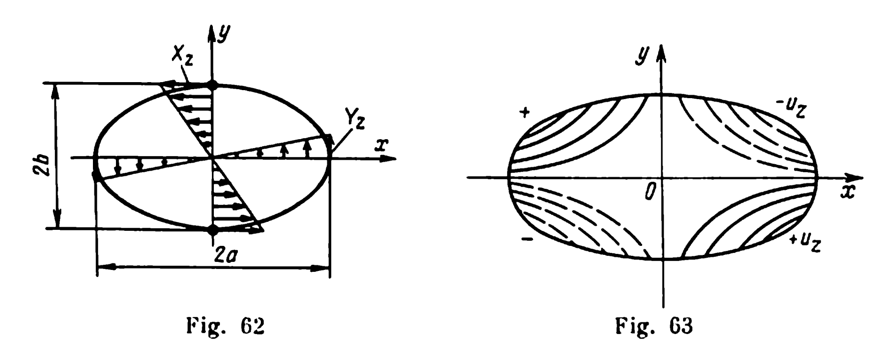


Fig. 62 Fig. 63

7.2. Une barre de section circulaire $f(x, y) = x^2 + y^2 - a^2 = 0$ est sollicitée à la torsion par le moment M_z.
Etudier l'état de contrainte de la barre.

On adopte en qualité de fonction des contraintes l'expression

$$\Phi = Af(x, y) = A(x^2 + y^2 - a^2),$$

où A est un facteur inconnu.
Selon l'équation (7.7)

$$2A + 2A = -2\alpha G,$$

d'où

$$A = -\alpha G/2,$$

quant à la fonction des contraintes elle devient

$$\Phi = \frac{\alpha G}{2}(a^2 - x^2 - y^2).$$

Les contraintes se déterminent d'après les formules (7.6):

$$X_z = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = -\alpha G y, \qquad Y_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \alpha G x.$$

La figure 64 donne les épures des contraintes.
Selon la formule (7.13)

$$M_z = \pi\alpha G a^4/2.$$

Les contraintes maximales sont:

$$\max X_z = \max Y_z = M_z/W_p,$$

où $W_p = \pi a^3/2$ est le moment polaire de la résistance.

Toutes les formules du problème considéré constituent un cas particulier des formules du problème (7.1) pour $a = b$, l'ellipse devenant un cercle. Dans le cas d'une barre de section circulaire, d'après la formule (b) du problème (7.1), $u_z = 0$, c'est-à-dire que les sections transversales demeurent planes au cours de la torsion.

7.3. Problème de Weber (1921).

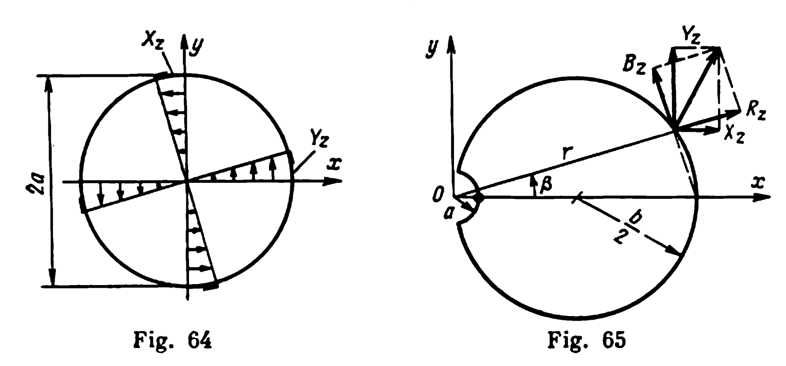


Fig. 64 Fig. 65

Une barre ronde de diamètre b avec une rainure semi-circulaire de rayon a est sollicitée à la torsion par le moment M_z (fig. 65). Chercher l'état de contrainte de la barre.

Les équations des contours de la section en coordonnées polaires prennent la forme:

$$f_1(r, \beta) = r - b\cos\beta = 0, \quad f_2(r, \beta) = r^2 - a^2 = 0.$$

La fonction des contraintes prend la forme

$$\Phi(r, \beta) = A\frac{f_1 f_2}{r} = A\left(r^2 - a^2 - br\cos\beta + \frac{ba^2}{r}\cos\beta\right),$$

où A est un facteur inconnu.

Sur le contour la fonction Φ est nulle.

En coordonnées cartésiennes avec

$$r\cos\beta = x, \quad r\sin\beta = y, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

la fonction des contraintes devient:

$$\Phi = A\left(x^2 + y^2 - a^2 - bx + \frac{ba^2 x}{x^2 + y^2}\right).$$

Selon l'équation (7.7)

$$A = -\alpha G/2,$$

et la fonction des contraintes devient

$$\Phi = \frac{\alpha G}{2}\left[a^2 - r^2 + b\cos\beta\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\right].$$

Selon la figure 65 les contraintes tangentielles en coordonnées polaires sont égales à:

$$R_z = X_z \cos\beta + Y_z \sin\beta = \frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial y}{\partial\beta} - \frac{\partial\Phi}{\partial x}\left(-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial x}{\partial\beta}\right) = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial\beta};$$

$$B_z = Y_z \cos\beta - X_z \sin\beta = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} - \frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}.$$

En dérivant la fonction Φ, il vient:

$$R_z = -\alpha G b\,(1 - a^2/r^2)\sin\beta;\quad B_z = \alpha G\,[r - b\,(1 + a^2/r^2)\cos\beta].$$

La valeur maximale est atteinte par la contrainte tangentielle au point du contour situé au fond de la rainure:

$$(\max B_z)_{\substack{\beta=0\\ r=a}} = -\alpha G\,(2b - a).$$

Quand $b \gg a$, elle est deux fois plus grande que sur le contour sans rainure (concentration des contraintes dans la rainure).

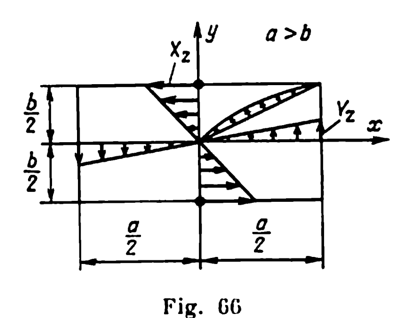


Fig. 66

7.4. Problème de Saint-Venant.

Une barre rectangulaire de côtés a et b ($a > b$) est sollicitée à la torsion par le moment M_z (fig. 66).

Etudier l'état de contrainte de la barre.

La fonction des contraintes prend la forme:

$$\Phi = \alpha G\,(b^2/4 - y^2) + F, \tag{a}$$

où F est une fonction inconnue.

En reportant l'expression (a) dans l'équation (7.7), on trouve que la fonction F doit satisfaire à l'équation harmonique

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0, \tag{b}$$

tandis que les conditions aux limites sont:
pour $x = \pm a/2$, $F = \alpha G\,(y^2 - b^2/4)$;
pour $y = \pm b/2$, $F = 0$.

En appliquant la méthode de Fourier cherchons la solution particulière (b) sous la forme:

$$F(x, y) = X(x)\,Y(y),$$

où $X(x)$ est une fonction de x, $Y(y)$ une fonction de y.

En reportant la fonction $F(x, y)$ dans l'équation (b) et en séparant les variables, on aboutit aux équations:

$$\frac{d^2X}{dx^2} - \lambda^2 X = 0, \qquad \frac{d^2Y}{dy^2} + \lambda^2 y = 0, \tag{c}$$

où λ^2 est une grandeur constante.

En vertu de la symétrie du problème, on choisit la solution des équations (c) sous la forme de fonctions paires $X = \operatorname{ch} \lambda x$, $Y = \cos \lambda y$, d'où l'on tire

$$F = \sum_k A_k \operatorname{ch} \lambda_k x \cos \lambda_k y.$$

Quand $y = \pm b/2$ $F = 0$, d'où $\cos \lambda_k b/2 = 0$ et $\lambda_k = (2k + 1) \times \pi/b$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Quand $x = \pm a/2$ $F = \alpha G(y^2 - b^2/4)$, c'est-à-dire

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \operatorname{ch} \frac{(2k+1)\pi a}{2b} \cos \frac{(2k+1)\pi y}{b} = \alpha G(y^2 - b^2/4). \tag{d}$$

Le second membre de l'égalité (d) dans l'intervalle $-b/2 \leqslant y \leqslant b/2$ se développe en une série trigonométrique suivant les cosinus:

$$\alpha G(y^2 - b^2/4) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \cos \frac{(2k+1)\pi}{b} y, \tag{e}$$

où

$$B_k = \frac{2}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \alpha G(y^2 - b^2/4) \cos \frac{(2k+1)\pi y}{b}\, dy = -\frac{8\alpha G b^2 (-1)^k}{\pi^3 (2k+1)^3}.$$

En comparant les coefficients A_k et B_k des expressions (d) et (e), il vient

$$A_k = B_k / \operatorname{ch} \frac{(2k+1)\pi a}{2b}.$$

En définitive la fonction des contraintes devient

$$\Phi = \alpha G \left[\frac{b^2}{4} - y^2 - \frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \operatorname{ch} \frac{(2k+1)\pi x}{b} \cos \frac{(2k+1)\pi y}{b}}{(2k+1)^3 \operatorname{ch} \frac{(2k+1)\pi a}{2b}} \right].$$

La contrainte tangentielle maximale s'observera dans la partie médiane des côtés longs quand $x = 0$ et $y = \pm b/2$:

$$\max X_z = \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\ y=\pm\frac{b}{2}}} = \alpha G b\left[1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2 \operatorname{sh}\frac{(2k+1)\pi a}{2b}}\right].$$

Sur la figure 66 sont données les épures des contraintes. Selon l'expression (7.13)

$$M_z = \alpha G a b^3\left[\frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5}\cdot\frac{b}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\operatorname{th}\frac{(2k+1)\pi a}{2b}}{(2k+1)^5}\right].$$

Les séries infinies pour $a/b \gg 1$ convergent rapidement. Pour des calculs pratiques il est commode d'utiliser les formules:

$$\max X_z = M_z/(q_1 a b^2),\quad \max Y_z = q_2\,(\max X_z),\quad \alpha = M_z/C_{\text{tor}},$$

où $C_{\text{tor}} = q_3 G a b^3$ est la rigidité de torsion.

Les valeurs des coefficients q_i sont données dans le tableau.

a/b	q_1	q_2	q_3	a/b	q_1	q_2	q_3
1	0,208	1,000	0,140	6	0,298	0,743	0,298
1,5	0,230	0,860	0,196	8	0,307	0,743	0,307
2	0,246	0,795	0,229	10	0,312	0,743	0,312
3	0,267	0,753	0,263	∞	0,333	0,743	0,333
4	0,282	0,745	0,281		(1/3)		(1/3)

7.5. Problème de Saint-Venant.

Une barre de section transversale en forme d'un triangle équilatéral d'hauteur a (fig. 67) est sollicitée à la torsion par le moment M_z. Etudier l'état de contrainte de la barre.

La fonction des contraintes est prise sous la forme

$$\Phi = A\,[x^2 + y^2 - (x^3 - 3xy^2)/a - 4a^2/27].$$

Il est aisé de vérifier que sur le contour de la section

$$\left(x = -\frac{a}{3}\ \text{ et }\ y = \pm\frac{x}{\sqrt{3}} \pm \frac{2}{3}\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$$

la fonction Φ devient nulle.

Selon l'équation (7.7)

$$A = -\alpha G/2$$

et la fonction des contraintes (a) devient

$$\Phi = -\frac{\alpha G}{2}\left[x^2 + y^2 - \frac{1}{a}(x^3 - 3xy^2) - \frac{4a^2}{27}\right].$$

Selon les formules (7.6), les contraintes sont:

$$X_z = -\alpha G(y + 3xy/a), \quad Y_z = \alpha G\left[x - \frac{3}{2a}(x^2 - y^2)\right].$$

Les épures des contraintes sont représentées sur la figure 67.

De l'équation (7.9), il s'ensuit que

$$u_z = \frac{\alpha}{2a}(3xy^2 - x^3),$$

qui devient nul pour $x = 0$ et $x = \pm\sqrt{3}y$, c'est-à-dire sur les trois perpendiculaires abaissées du sommet du triangle limitant la section

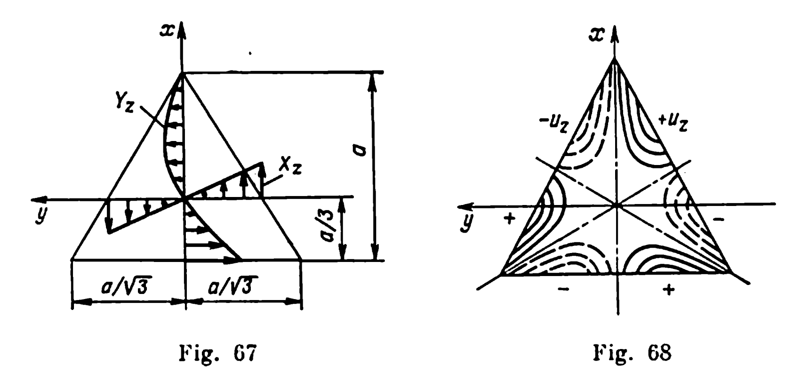


Fig. 67 Fig. 68

transversale sur ses côtés. Les lignes $u_z = \text{const}$ sont des courbes algébriques du troisième degré, dont l'aspect général est donné sur la figure 68.

7.6. Problème de Leibenzon [36].

Une barre de section transversale en forme d'un demi-anneau (fig. 69), est sollicitée à la torsion par le moment M_z.

Etudier l'état de contrainte de la barre.

L'équation de Poisson (7.7) en coordonnées polaires prend la forme

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2} = -2\alpha G. \qquad \text{(a)}$$

Cherchons la solution de l'équation (a) vérifiant sur le contour la condition (7.10) de la fonction des contraintes

$$\Phi = 0.$$

Développons le second membre de l'équation (a) dans l'intervalle $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$ en série de Fourier:

$$-2\alpha G = -\frac{8\alpha G}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1)\beta \qquad (b)$$

et cherchons la solution de l'équation (a) sous la forme de la série

$$\Phi(r, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r) \sin(2n+1)\beta. \qquad (c)$$

En reportant les expressions (b) et (c) dans la formule (a), on

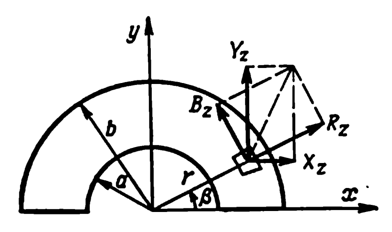


Fig. 69

obtient l'équation déterminante pour $f_n(r)$:

$$\frac{d^2 f_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{df_n}{dr} - \frac{(2n+1)^2}{r^2} f_n = -\frac{8}{\pi} \cdot \frac{\alpha G}{2n+1}. \qquad (d)$$

En résolvant l'équation (d), il vient

$$f_n(r) = A_n r^{2n+1} + B_n r^{-2n-1} + C_n r^2, \qquad (e)$$

où A_n et B_n sont des constantes d'intégration;

$C_n = \frac{8\alpha G}{\pi(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$ étant la constante de la solution particulière.

La série satisfait à la condition $\Phi = 0$ sur des secteurs rectilignes ($\beta = 0$ et $\beta = \pi$). En s'appuyant sur les deux autres conditions:

$$f_n(a) = f_n(b) = 0$$

on trouve A_n et B_n (e). En définitive, il vient

$$f_n(r) = C_n b^2 (\rho^2 - a_n \rho^{2n+1} - b_n \rho^{-2n-1}),$$

$$a_n = \frac{1-k^{2n+3}}{1-k^{4n+2}}, \qquad b_n = k^{2n+3}\frac{1-k^{2n-1}}{1-k^{4n+2}},$$

$$k = a/b, \qquad \rho = r/b.$$

La fonction de torsion (c) devient

$$\Phi(\rho, \beta) = b^2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n (\rho^2 - a_n\rho^{2n+1} - b_n\rho^{-2n-1}) \sin(2n+1)\beta.$$

Selon les formules (7.6):

$$X_z = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{1}{b}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\sin\beta + \frac{\partial\Phi}{\partial\beta}\cdot\frac{\cos\beta}{\rho}\right);$$

$$Y_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\frac{1}{b}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\cos\beta - \frac{\partial\Phi}{\partial\beta}\cdot\frac{\sin\beta}{\rho}\right).$$

De là, selon la figure 69,

$$R_z = Y_z\sin\beta + X_z\cos\beta = \frac{1}{b}\cdot\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial\beta},$$

$$B_z = Y_z\cos\beta - X_z\sin\beta = -\frac{1}{b}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}.$$

En définitif, il vient

$$R_z = b\sum_{n=0}^{\infty} C_n (2n+1)\left[\rho - a_n\rho^{2n} - b_n\rho^{-2(n+1)}\right]\cos(2n+1)\beta,$$

$$B_z = -b\sum_{n=0}^{\infty} C_n (2n+1)\left[\frac{2}{2n+1}\rho - a_n\rho^{2n} + b_n\rho^{-2(n+1)}\right]\sin(2n+1)\beta.$$

La contrainte tangentielle résultante atteint sa valeur maximale pour $\rho = 1$ et $\beta = \pi/2$ (au milieu de l'arc du demi-cercle de grand rayon).

Déterminer le lien de l'angle de torsion α avec le moment de torsion M_z.

▶ Etudier la torsion d'une barre de section en forme d'un demi-cercle quand $a = 0$ (problème de Timochenko).

7.7. Problème de Föppl (1905) [28].

Un arbre conique est sollicité à la torsion par le moment $\boldsymbol{M_z}$ appliqué à son sommet (fig. 70).

Déterminer les contraintes tangentielles.

Toute fonction établissant le rapport

$$\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} = \cos\beta = \mathrm{const}$$

vérifie l'équation (7.19).

Définissons la fonction ψ sous la forme

$$\psi = C\left[\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} - \frac{1}{3}\left(\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\right)^3\right].$$

La constante C se détermine à l'aide de l'équation (7.21):

$$C = \frac{3M_z}{2\pi(2-3\cos\beta+\cos^3\beta)}.$$

Les contraintes tangentielles selon les formules (7.18) seront égales à:

$$B_r = -Cr^2/(r^2+z^2)^{5/2},\ B_z = -Crz/(r^2+z^2)^{5/2}.$$

7.8. Problème de Melan (1920) [38].

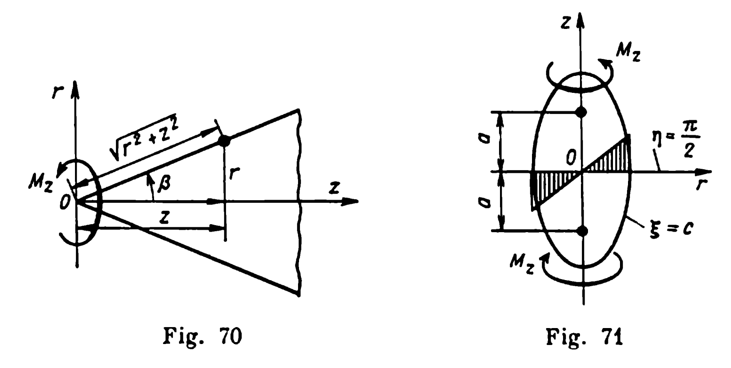


Fig. 70 Fig. 71

Un arbre en forme d'ellipsoïde de révolution est sollicité à la torsion par les moments M_z appliqués à ses sommets (fig. 71).

Chercher les contraintes tangentielles.

Les coordonnées elliptiques ξ et η sont liées aux coordonnées r et z par les égalités:

$$r = a\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\eta,\quad z = a\,\mathrm{sh}\,\xi\cos\eta.$$

Les courbes $\eta = \mathrm{const}$ constituent une famille d'hyperboles orthogonales aux ellipses $\xi = \mathrm{const}$ dont l'axe réel est Oz et l'axe imaginaire Or.

Les courbes $\xi = \mathrm{const}$ constituent une famille d'ellipses homofocales de distance focale $2a$ et de grand axe coïncidant avec l'axe Ox (voir fig. 13; sur fig. 71 c'est l'axe Oz).

Définissons la fonction ψ sous la forme:

$$\psi = C(2 - 3\,\mathrm{ch}\,\xi + \mathrm{ch}^2\,\xi).$$

Cette fonction s'annule sur l'axe de l'arbre quand $\xi = 0$. Elle est constante, par contre, pour $\xi = \mathrm{const}$ sur une surface correspondant à un quelconque ellipsoïde de révolution.

Les contraintes sont :

$$\tau_\xi = 0\,; \quad \tau_\eta = \frac{3C\,\mathrm{sh}\,\xi}{a^3 \sin^2\eta\,(\mathrm{ch}^2\xi - \cos^2\xi)^{1/2}},$$

Pour $\eta = \pi/2$, c'est-à-dire sur l'axe Or

$$\tau_\eta = \frac{3C}{a^2}\,\mathrm{th}\,\xi = \frac{3C}{a^3}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2+a^2}}.$$

7.9. Problème de Melan (1920) [37].

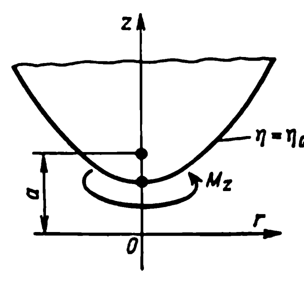


Fig. 72

Un arbre infini ayant l'aspect d'une des branches d'un hyperboloïde de révolution à deux nappes est sollicité à la torsion par le moment M_z appliqué à son sommet (fig. 72).

Chercher les contraintes tangentielles.

Définissons la fonction des contraintes sous la forme

$$\psi = C\,(2 - 3\cos\eta + \cos^3\eta),$$

où la constante C se détermine d'après la formule (7.21).

Les contraintes sont :

$$\tau_\xi = \frac{3C\sin\eta}{a^3\,\mathrm{sh}^2\xi\,(\mathrm{ch}^2\xi - \cos^2\eta)^{1/2}}\,; \quad \tau_\eta = 0.$$

▶ Etudier la torsion d'un arbre dont la surface latérale est engendrée par la révolution d'un arc d'hyperbole autour de l'axe imaginaire de l'arbre ayant la forme d'un hyperboloïde de révolution à une nappe (fig. 73).

Conseil. Définir la fonction des contraintes sous la forme :

$$\psi = C\,(2 - 3\sin\eta + \sin^3\eta).$$

7.10. Etudier la torsion d'un arbre cylindrique affaibli par une cavité en forme d'un ellipsoïde de révolution dont le grand axe est situé sur l'axe Oz (fig. 74).

En adoptant dans la troisième egalité de (7.42)

$$n = 2,\ A_2 = C_2 a^4,\ B_2 = 0,\ C_2 = 1,\ D_2 = -D,$$

on obtient

$$\psi = Cr^4 \left\{1 - D\left[\frac{\operatorname{ch}\xi\,(2-3\operatorname{sh}^2\xi)}{8\operatorname{sh}^4\xi} - \frac{3}{8}\operatorname{Log}\operatorname{th}\frac{\xi}{2}\right]\right\}, \qquad \text{(a)}$$

où

$$D = \frac{1}{\dfrac{\operatorname{ch}\xi_0\,(2-3\operatorname{sh}^2\xi_0)}{8\operatorname{sh}^4\xi_0} - \dfrac{3}{8}\operatorname{Log}\operatorname{th}\dfrac{\xi_0}{2}}.$$

La fonction (a) est nulle quand $r = 0$ et $\xi = \xi_0$, c'est-à-dire sur l'axe Oz et sur le contour d'une certaine ellipse de la section

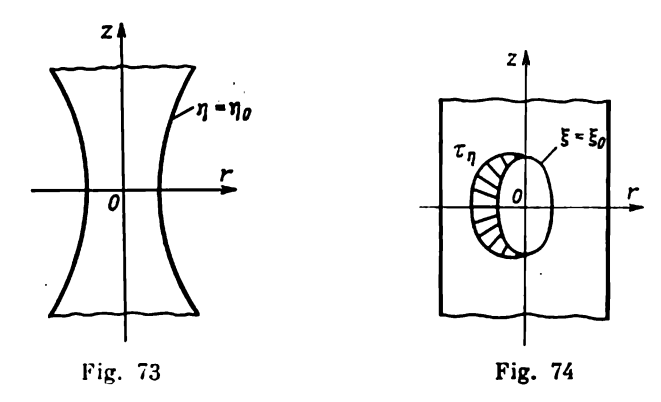


Fig. 73 Fig. 74

axiale de l'arbre. Quand $z \to \infty$ la fonction ψ tend vers la valeur Cr^4, c'est-à-dire vers la solution d'un arbre cylindrique plein.

Les contraintes tangentielles sont égales à :

$$\tau_\xi = -\frac{2Ca\sin^2\eta\operatorname{sh}^2\xi}{(\operatorname{ch}^2\xi-\cos^2\eta)^{1/2}}\left\{1 - D\left[\frac{\operatorname{ch}\xi\,(2-3\operatorname{sh}^2\xi)}{8\operatorname{sh}^4\xi} - \frac{3}{8}\operatorname{Log}\operatorname{th}\frac{\xi}{2}\right]\right\},$$

$$\tau_\eta = \frac{Ca\sin^2\eta\operatorname{sh}^2\beta}{(\operatorname{ch}^2\xi-\cos^2\eta)^{1/2}}\left\{4\operatorname{cth}\xi + \right.$$

$$\left. + D\left[\frac{\operatorname{ch}^2\xi+2\operatorname{sh}^2\xi}{2\operatorname{sh}^2\xi} + \frac{3}{2}\operatorname{cth}\xi\operatorname{Log}\operatorname{th}\frac{\xi}{2}\right]\right\},$$

Sur le contour curviligne interne pour $\xi = \xi_0$

$$\tau_\xi = 0, \quad \tau_\eta = \frac{CDa\sin^2\eta}{\operatorname{ch}^3\xi_0\,(\operatorname{ch}^2\xi_0-\cos^2\eta)^{1/2}}.$$

▶ Etudier la torsion d'un arbre cylindrique à cavité elliptique dont le grand axe est perpendiculaire à l'axe de l'arbre.

Conseil. Avec le choix de la fonction poser dans la troisième équation (7.44)

$$n = 2,\ A_2 = C_2 a^4,\ B_1 = 0,\ C_2 = 1,\ D_2 = D.$$

▶ Etudier la torsion d'un arbre cylindrique à cavité sphérique se disposant sur son axe.

Conseil. Dans le choix de la fonction ψ poser dans l'équation (7.38)

$$n = 2,\ A_2 = C_2,\ B_2 = -Ce^{5\xi_0}.$$

CHAPITRE 8

PROBLÈME D'ORIGINE THERMIQUE

On suppose que la température varie dans les limites pour lesquelles les coefficients d'élasticité demeurent constants ; les allongements sont proportionnels à la température et restent les mêmes dans toutes les directions et, partant, les déformations angulaires du volume élémentaire chauffé sont nulles. On étudiera les processus thermiques établis et non établis.

I. PROCESSUS THERMIQUE ÉTABLI

On appelle processus thermique établi le processus d'origine thermique au cours duquel $t = t(x, y, z)$ est une fonction connue des coordonnées.

Pour déterminer le champ de température stationnaire $t = t(x, y, z)$ on étudie l'équation de conduction thermique [38]

$$\nabla^2 t = 0$$

avec les conditions aux limites correspondantes [voir l'équation (4.21) et (8.23)].

Dans les calculs de constructions édifiées sur un terrain gelé, quand $k = k(t)$, l'équation de conduction thermique prend la forme [39] :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\,\frac{\partial t}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\,\frac{\partial t}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\,\frac{\partial t}{\partial z}\right)=0,$$

où k est le coefficient de conductibilité thermique de Maxwell, voir équation (8.23).

1. Équations statiques et géométriques

On les établit sous la forme (1.1a) et (2.1a), (1.1b) et (2.1b), (1.1c) et (2.1c) suivant le type d'axes de coordonnées.

2. Équations physiques

Forme directe de loi de Hooke — équation de Duhamel-Neumann (1838, 1885):

$$\left.\begin{aligned} e_{xx}&=\frac{1}{E}[X_x-\sigma(Y_y+Z_z)]+\alpha t, & e_{xy}&=\frac{1}{G}X_y,\\ e_{yy}&=\frac{1}{E}[Y_y-\sigma(Z_z+X_x)]+\alpha t, & e_{yz}&=\frac{1}{G}Y_z,\\ e_{zz}&=\frac{1}{E}[Z_z-\sigma(X_x+Y_y)]+\alpha t, & e_{zx}&=\frac{1}{G}Z_x,\end{aligned}\right\} \quad (8.1)$$

où α est le coefficient thermique de la dilatation linéaire, 1/° C; αt la dilatation thermique relative.

Forme inverse de la loi de Hooke:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \lambda\theta + 2Ge_{xx} - K\alpha t, & X_y &= Ge_{xy},\\ Y_y &= \lambda\theta + 2Ge_{yy} - K\alpha t, & Y_z &= Ge_{yz},\\ Z_z &= \lambda\theta + 2Ge_{zz} - K\alpha t, & Z_x &= Ge_{zx},\end{aligned}\right\} \quad (8.2)$$

où $K = 2G + 3\lambda = E/(1-2\sigma)$ est le module triple de la compression cubique (voir problème 1.3).

3. Équations thermiques de Duhamel-Neumann

$$\left.\begin{aligned} (\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial x}+G\nabla^2u_x-K\alpha\frac{\partial t}{\partial x}&=0,\\ (\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial y}+G\nabla^2u_y-K\alpha\frac{\partial t}{\partial y}&=0,\\ (\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial z}+G\nabla^2u_z-K\alpha\frac{\partial t}{\partial z}&=0.\end{aligned}\right\} \quad (8.3)$$

Les conditions à la surface (1.2) rapportées aux composantes du vecteur déplacement u prennent la forme:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\lambda\theta+2G\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)l+G\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)m+\\ &+G\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)n=K\alpha\, tl,\\ &G\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)l+\left(\lambda\theta+2G\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)m+\\ &+G\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)n=K\alpha\, tm,\\ &G\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)l+G\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)m+\\ &+\left(\lambda\theta+2G\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)n=K\alpha\, tn.\end{aligned}\right\} \quad (8.4)$$

Il s'ensuit des équations (8.3) et (8.4) que le problème d'origine thermique peut être réduit au problème banal de la théorie de l'élasticité avec les forces volumiques

$$X,\ Y,\ Z = \operatorname{grad}(-K\alpha t) = -K\alpha\left(\frac{\partial t}{\partial x},\ \frac{\partial t}{\partial y},\ \frac{\partial t}{\partial z}\right)$$

et la pression superficielle normale extérieure

$$p = -K\alpha t.$$

4. Équations de Beltrami-Mitchell

$$\begin{aligned}
&\nabla^2 X_x + \frac{2(\lambda+G)}{K}\cdot\frac{\partial^2\Theta'}{\partial x^2} + \frac{2GK\alpha}{\lambda+2G}\nabla^2 t + 2G\alpha\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0;\\
&\nabla^2 Y_y + \frac{2(\lambda+G)}{K}\cdot\frac{\partial^2\Theta'}{\partial y^2} + \frac{2GK\alpha}{\lambda+2G}\nabla^2 t + 2G\alpha\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0;\\
&\nabla^2 Z_z + \frac{2(\lambda+G)}{K}\cdot\frac{\partial^2\Theta'}{\partial z^2} + \frac{2GK\alpha}{\lambda+2G}\nabla^2 t + 2G\alpha\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} ; = 0;\\
&\nabla^2 X_y + \frac{2(\lambda+G)}{K}\cdot\frac{\partial^2\Theta'}{\partial x\,\partial y} + 2G\alpha\frac{\partial^2 t}{\partial x\,\partial y} = 0;\\
&\nabla^2 Y_z + \frac{2(\lambda+G)}{K}\cdot\frac{\partial^2\Theta'}{\partial y\,\partial z} + 2G\alpha\frac{\partial^2 t}{\partial y\,\partial z} = 0;\\
&\nabla^2 Z_x + \frac{2(\lambda+G)}{K}\cdot\frac{\partial^2\Theta'}{\partial z\,\partial x} + 2G\alpha\frac{\partial^2 t}{\partial z\,\partial x} = 0,
\end{aligned}\tag{8.5}$$

où

$$\Theta' = X_x + Y_y + Z_z = K\theta - 3K\alpha t;$$

$$\frac{2(\lambda+G)}{K} = \frac{2}{1+\sigma},\ \frac{2GK}{\lambda+2G} = \frac{E}{1-\sigma}.$$

5. Résolution des équations de Lamé

La solution des équations (8.3) est prise sous la forme

$$u_x = u_x^{(1)} + u_x^{(2)};\ u_y = u_y^{(1)} + u_y^{(2)};\ u_z = u_z^{(1)} + u_z^{(2)}, \tag{8.6}$$

où $u^{(1)}$ est la solution générale; $u^{(2)}$ la solution particulière.

La solution générale est prise selon le ch. 4, par exemple, sous la forme proposée par Papkovitch (4.27),

$$2G\left(u_x^{(1)},\ u_y^{(1)},\ u_z^{(1)}\right) = 4(1-\sigma)\,\psi_{1,2,3} - \frac{\partial\psi}{\partial x,\ y,\ z},$$

où ψ_i est une fonction harmonique quelconque;

$$\psi = x\psi_1 + y\psi_2 + z\psi_3.$$

En posant avec la recherche de la solution particulière

$$u_x^{(2)} = \frac{\partial F}{\partial x},\ u_y^{(2)} = \frac{\partial F}{\partial y},\ u_z^{(2)} = \frac{\partial F}{\partial z}, \tag{8.7}$$

on obtient à partir des équations (8.3) pour la fonction F l'équation de Poisson :

$$\nabla^2 F = \frac{K\alpha}{\lambda+2G}\, t = \frac{1+\sigma}{1-\sigma}\, \alpha t, \tag{8.8}$$

d'où

$$F(x, y, z) = -\frac{K\alpha}{4\pi(\lambda+2G)} \int\limits_V \frac{t(\xi, \eta, \zeta)\, dV}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}, \tag{8.9}$$

où ξ, η, ζ sont les coordonnées du volume élémentaire dV ; V étant le volume de tout le corps.

Les conditions aux limites (8.4) sont :

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\lambda\theta^{(1)} + 2G\frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial x}\right) l + G\left(\frac{\partial u_y^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial y}\right) m + \\
&\quad + G\left(\frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial z}\right) n = \frac{2GK\alpha t}{\lambda+2G} l - 2G\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial \nu}\right);\\
&G\left(\frac{\partial u_y^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial y}\right) l + \left(\lambda\theta^{(1)} + 2G\frac{\partial u_y^{(1)}}{\partial y}\right) m + \\
&\quad + G\left(\frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(1)}}{\partial z}\right) n = \frac{2GK\alpha t}{\lambda+2G} m - 2G\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial \nu}\right);\\
&G\left(\frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial z}\right) l + G\left(\frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(1)}}{\partial z}\right) m + \\
&\quad + \left(\lambda\theta^{(1)} + 2G\frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z}\right) n = \frac{2GK\alpha t}{\lambda+2G} n - 2G\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial \nu}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{8.10}$$

6. Déformation plane

Conditions principales:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = a,\\
&u_x = u_x(x, y), \quad u_y = u_y(x, y), \quad u_z = az,\\
&X_z = Y_z = 0, \quad Z_z = \frac{\lambda}{2(\lambda+G)}(X_x - X_y) - \frac{GK}{\lambda+G}(a - \alpha t),\\
&X_x = X_x(x, y), \quad Y_y = Y_y(x, y), \quad X_y = X_y(x, y).
\end{aligned}\right\} \tag{8.11}$$

Equations d'équilibre:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0, \tag{8.12}$$

Equation de continuité des déformations

$$\nabla^2(X_x + Y_y) + \frac{2GK\alpha}{\lambda+2G}\nabla^2 t = 0. \tag{8.13}$$

En intégrant les équations (8.12) et (8.13), on obtient les contraintes :

$$X_x = \frac{\partial^2 (U-T)}{\partial y^2}; \quad Y_y = \frac{\partial^2 (U-T)}{\partial x^2}; \quad X_y = -\frac{\partial^2 (U-T)}{\partial x \, \partial y}, \tag{8.14}$$

où U est la fonction qui satisfait à l'équation biharmonique

$$\nabla^2 \nabla^2 U = 0; \tag{8.15}$$

T la fonction satisfaisant à l'équation de Poisson

$$\nabla^2 T = \frac{2GK\alpha}{\lambda + 2G} t = t_1. \tag{8.16}$$

Pour déterminer les déplacements il faut intégrer les équations (8.1) compte tenu de (8.11) :

$$2G(\lambda + G) \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\lambda + 2G}{2} X_x - \frac{\lambda}{2} Y_y - GK\alpha t - \lambda G a,$$

$$2G(\lambda + G) \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\lambda + 2G}{2} Y_y - \frac{\lambda}{2} X_x + GK\alpha t - \lambda G a;$$

en intégrant, il vient:

$$\left.\begin{aligned} 2G(\lambda + G) u_x &= \frac{\lambda + 2G}{2} \int \nabla^2 U \, dx - (\lambda + G) \frac{\partial (U-T)}{\partial x} - \\ &\quad - \lambda G a x + f_1(y), \\ 2G(\lambda + G) u_y &= \frac{\lambda + 2G}{2} \int \nabla^2 U \, dy - (\lambda + G) \frac{\partial (U-T)}{\partial y} - \\ &\quad - \lambda G a y + f_2(x), \end{aligned}\right\} \tag{8.17}$$

où $f_1(y) = Ay + B$, $f_2(x) = -Ax + C$ sont des fonctions correspondant au déplacement du corps solide.

Avec la résolution du problème en coordonnées polaires les formules (8.14) se transforment ainsi :

$$\left.\begin{aligned} R_r &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (U-T)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 (U-T)}{\partial \beta^2}; \\ B_\beta &= \frac{\partial^2 (U-T)}{\partial r^2}; \\ R_\beta = B_r &= -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (U-T)}{\partial \beta} \right], \end{aligned}\right\} \tag{8.18}$$

tandis que l'équation (8.16) devient

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \beta^2} = \frac{2GK\alpha t}{\lambda + 2G} = t_1. \tag{8.19}$$

Les composantes du déplacement se déterminent à partir des équations :

$$2G(\lambda + G) \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{\lambda + 2G}{2} R_r - \frac{\lambda}{2} B_\beta + GK\alpha t - \lambda G a;$$

$$2G(\lambda + G) \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + \frac{u_r}{r} \right) = \frac{\lambda + 2G}{2} B_\beta - \frac{\lambda}{2} R_r + GK\alpha t - \lambda G a.$$

En intégrant ces équations on obtient en définitive:

$$\left.\begin{array}{l} 2G(\lambda+G)u_r = \frac{\lambda+2G}{2}\int \nabla^2 U\,dr - (\lambda+G)\frac{\partial(U-T)}{\partial r} - \\ \qquad - \lambda G a r + F_1(\beta); \\ 2G(\lambda+G)u_\beta = -\frac{\lambda+2G}{2}\int\int \nabla^2 U\,dr\,d\beta - \\ -\frac{\lambda r}{2}\int \nabla^2 U d\beta + (\lambda+G)\frac{\partial}{\partial r}\left[r\int \frac{\partial(U-T)}{\partial r}d\beta\right] + \\ + \frac{2G(\lambda+G)K\alpha}{\lambda+2G} r\int t d\beta - \int F_1(\beta)\,d\beta + F_2(r), \end{array}\right\} \qquad (8.20)$$

où

$$F_1(\beta) = A\sin\beta + B\cos\beta;\ F_2(r) = Cr + A$$

sont des fonctions correspondant au déplacement du corps solide.

7. État plan de contrainte

Conditions principales

$$\left.\begin{array}{c} Z_z = X_z = Y_z = 0, \\ X_x = X_x(x, y),\ Y_y = Y_y(x, y),\ X_y = X_y(x, y). \end{array}\right\} \qquad (8.21)$$

Les formules (8.14) et (8.15) restent inchangées, tandis que l'équation (8.16) prend la forme

$$\nabla^2 T = \frac{GK\alpha}{\lambda+G}t = t_2. \qquad (8.22)$$

Pour déterminer les déplacements il faut intégrer les équations (8.1) compte tenu de (8.21).

II. PROCESSUS THERMIQUE NON ÉTABLI

On appelle processus non établi un processus pour lequel $t = t(x, y, z, \tau)$ est une fonction inconnue de la position du point et du temps τ.

Pour déterminer les températures on étudie en complément l'équation de conduction thermique

$$\varkappa\nabla^2 t + \frac{W}{c\rho} = \frac{\partial t}{\partial \tau}, \qquad (8.23)$$

où $\varkappa = \frac{k}{c\rho}\left(\frac{\text{cm}^2}{\text{s}}\right)$ est le coefficient de conductibilité thermique;
$k\left(\frac{\text{cal}\cdot\text{s}}{\text{cm}^2\cdot{}^\circ\text{C}}\right)$ le coefficient de conductibilité thermique de Maxwell;
$c\left(\frac{\text{cal}}{\text{g}\cdot{}^\circ\text{C}}\right)$ la conductibilité spécifique;

$\rho = \frac{\gamma}{g}\left(\frac{g \cdot s^2}{cm^4}\right)$ la densité; $W\left(\frac{cal \cdot s}{cm^4}\right)$ la quantité de chaleur dégagée par unité de volume dans l'unité de temps par la source de chaleur située à l'intérieur du volume élémentaire dV.

L'équation (8.23) est intégrée, compte tenu des conditions variées à la surface. Lors de la résolution des problèmes on se heurte le plus souvent aux cas suivants:

1. La température à la surface est une fonction donnée des coordonnées et du temps.

2. Le flux de chaleur au travers de la surface du corps est nul, c'est-à-dire en tous les points de la surface de normale ν

$$\frac{\partial t}{\partial \nu} = 0, \tag{8.24}$$

3. Le flux de chaleur au travers de la surface du corps est une fonction donnée des coordonnées et du temps.

4. Un rayonnement émane de la surface. Si le flux de chaleur au travers de la surface est proportionnel à la différence des températures à la limite du corps (t) et le milieu environnant (t_0), c'est-à-dire est défini par l'expression

$$H\,(t - t_0),$$

où H est le coefficient de transmission de la chaleur, les conditions aux limites prennent la forme:

$$k\,\frac{\partial t}{\partial \nu} + H\,(t - t_0) = 0. \tag{8.25}$$

5. A la limite de deux couches

$$k_1\,\frac{\partial t_1}{\partial \nu} = k_2\,\frac{\partial t_2}{\partial \nu}.$$

Problèmes

8.1. Déterminer les contraintes dans un long tuyau (déformation plane) de rayon extérieur b et intérieur a échauffé symétriquement $[t = t\,(r)]$.

Selon les formules (8.18),

$$R_r = \frac{1}{r}\cdot\frac{d\,(U-T)}{dr}, \quad R_\beta = B_r = 0, \quad B_\beta = \frac{d^2\,(U-T)}{dr^2}. \tag{a}$$

De l'équation (8.19), on tire

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{dT}{dr} = t_1,$$

soit

$$\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{dT}{dr}\right) = t_1 r,$$

d'où

$$T=C_0+C_1\operatorname{Log} r+\int_c^r \frac{dr}{r}\int_c^r t_1 r\,dr.$$

La fonction U doit être prise sous la forme

$$U = C_2 \operatorname{Log} r + C_3 r^2.$$

Selon les formules (a) les contraintes seront égales à:

$$R_r=\frac{C_2-C_1}{r^2}+2C_3-\frac{1}{r^2}\int_c^r t_1 r\,dr;$$

$$B_\beta= -\frac{C_2-C_1}{r^2}+2C_3+\frac{1}{r^2}\int_c^r t_1 r\,dr-t_1.$$

Les constantes arbitraires $(C_2 - C_1)$ et C_3 se déterminent des conditions: pour

$$r={}^a_b\, R_r=0,$$

d'où

$$C_3=\frac{1}{2(b^2-a^2)}\int_a^b t_1 r\,dr;$$

$$C_2-C_1=\frac{1}{b^2-a^2}\left[b^2\int_c^a t_1 r\,dr-a^2\int_c^b t_1 r\,dr\right].$$

La contrainte Z_z se détermine d'après la formule (8.11), vu que

$$X_x + Y_y = R_r + B_\beta.$$

Pour un tuyau très court (état de contrainte plan) t_1 varie de t_z en vertu de la formule (8.22).

8.2. Problème de Gadoline (1858) [40].

Déterminer les contraintes dans un long cylindre composé de deux tuyaux en matériau différent engagés l'un dans l'autre (fig. 75).

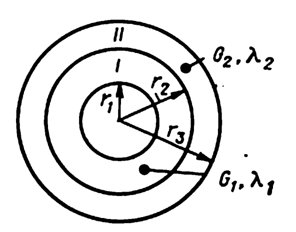


Fig. 75

La température du cylindre $t = t(r)$, c'est-à-dire qu'elle est symétrique par rapport à l'axe passant par le centre. Le contact entre les tuyaux n'est pas perturbé.

Notons X la pression entre les tuyaux au cours de l'échauf fement.

La valeur de X se détermine à partir des conditions selon lesquelles le déplacement des points du rayon extérieur du tuyau intérieur $u_r^{(1)}$ et du rayon intérieur du tuyau extérieur $u_r^{(2)}$ est le même.

Selon les formules (8.20) et le problème 6.1 les déplacements des tuyaux en direction du rayon seront égaux à :

$$\left.\begin{aligned}
2G_1u_r^{(1)} &= \frac{r_1^2\int_0^{r_1} tr\,dr - r_2^2\int_0^{r_1} tr\,dr}{(r_2^2-r_1^2)\,r} + \frac{1}{r}\int_0^r tr\,dr + \\
&+ \frac{G_1 r}{(\lambda_1+G_1)(r_2^2-r_1^2)}\int_{r_1}^{r_2} tr\,dr - \\
&- X\left(\frac{\lambda_1+2G_1}{K_1}\cdot\frac{r_2^2}{r_2^2-r_1^2}\,r + \frac{r_1^2r_2^2}{r_2^2-r_1^2}\cdot\frac{1}{r}\right); \\
2G_2u_r^{(2)} &= \frac{r_2^2\int_0^{r_2} tr\,dr - r_3^2\int_0^{r_3} tr\,dr}{(r_3^2-r_2^2)\,r} + \frac{1}{r}\int_0^r tr\,dr + \\
&+ \frac{G_2 r}{(\lambda_2+G_2)(r_3^2+r_2^2)}\int_{r_2}^{r_3} tr\,dr + \\
&+ X\left(\frac{\lambda_2+2G_2}{K_2}\cdot\frac{r_3^2}{r_3^2-r_2^2} + \frac{r_2^2r_3^2}{r_3^2-r_2^2}\cdot\frac{1}{r}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

Les équations (a) peuvent être récrites sous une forme plus concise :

$$2G_1u_r^{(1)} = \varphi_1(r) - X\psi_1(r); \qquad 2G_2u_r^{(2)} = \varphi_2(r) + X\psi_2(r), \qquad \text{(b)}$$

où les valeurs φ_i et ψ_i s'explicitent de la confrontation des équations (a) et (b).

Donc, puisque pour $r = r_2$, $u_r^{(1)} = u_r^{(2)}$, on a

$$X = \frac{G_2\varphi_1(r_2) - G_1\varphi_2(r_2)}{G_1\psi_1(r_2) - G_2\psi_2(r_2)}. \qquad \text{(c)}$$

8.3. Déterminer les contraintes dans un long tuyau échauffé de façon asymétrique et dont le rayon intérieur est a et le rayon extérieur b. La température dans le tuyau s'exprime à l'aide de la fonction connue $t = t(r, \beta)$.

Etant donné que l'on étudie le cas d'une déformation plane, il faut appliquer les formules (8.18). La fonction T sera calculée à partir des équations (8.19)

$$\nabla^2 T = t_1(r, \beta), \qquad \text{(a)}$$

où

$$t_1(r, \beta) = \frac{2GK\alpha}{\lambda+2G}\,t(r, \beta).$$

Développons la fonction $t_1(r, \beta)$ en série trigonométrique

$$t_1(r, \beta) = \varphi_0(r) + \sum_{n=0}^{\infty} [\varphi_n(r) \cos n\beta + \psi_n(r) \sin n\beta], \qquad \text{(b)}$$

où

$$\varphi_n(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t_1(r, \beta) \cos n\beta \cdot d\beta;$$

$$\psi_n(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t_1(r, \beta) \sin n\beta \cdot d\beta.$$

Le terme $\varphi_0(r)$ sera exclu de la discussion, car cette solution est donnée au problème 8.1.

La fonction T sera recherchée sous la forme de la série

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} [f_n(r) \cos n\beta + g_n(r) \sin n\beta]. \qquad \text{(c)}$$

En reportant les expressions (b) et (c) dans l'équation (a), on obtient pour les fonctions inconnues $f_n(r)$ et $g_n(r)$ les équations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} f_n''(r) + \frac{1}{r} f_n'(r) - \frac{n^2}{r^2} f_n(r) = \varphi_n(r); \\ g_n''(r) + \frac{1}{r} g_n'(r) - \frac{n^2}{r^2} g_n(r) = \psi_n(r). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(d)}$$

Vu que les équations (d) sont euleriennes, en introduisant une nouvelle variable $z = \mathrm{Log}\, r$ $(r = e^z)$, on obtient l'équation (d) sous la forme

$$f_n''(z) - n^2 f_n(z) = e^{2z} \varphi_n(e^z) = \omega_n(z). \qquad \text{(e)}$$

La solution générale de (e) sera

$$f_n(z) = a_n e^{nz} + b_n e^{-nz}.$$

La solution particulière se détermine par la méthode de variation des constantes arbitraires a_n et b_n (voir problème 3.3).

En définitive, on obtient pour $f_n(z)$:

$$f_n(z) = a_n e^{nz} + b_n e^{-nz} + \frac{e^{nz}}{2n} \int_{k_n}^{e^z} e^{-nz} \omega_n(z)\, dz - \frac{e^{-nz}}{2n} \int_{l_n}^{e^z} e^{nz} \omega_n(z)\, dz, \quad \text{(f)}$$

où k_n et l_n sont des nombres choisis arbitrairement.

Pour $g_n(z)$, après une substitution adéquate de la fonction $\omega_n(z)$ sur la base de l'équation (e), on obtient une expression ana-

logue. Une fois rapportée l'expression (f) dans la formule (c) on revient à la variable r, et on obtient :

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{r^n}{2n} \int_{kn}^{r} r^{-n+1} \varphi_n(r)\, dr - \frac{r^{-n}}{2n} \int_{ln}^{r} r^{n+1} \varphi_n(r)\, dr \right] \cos n\beta +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{r^n}{2n} \int_{kn}^{r} r^{-n+1} \psi_n(r)\, dr - \frac{r^{-n}}{2n} \int_{ln}^{r} r^{n+1} \psi_n(r)\, dr \right] \sin n\beta .$$

Les termes de la solution générale entrent dans l'expression de la fonction U.

La fonction biharmonique U, selon (6.13), est prise sous la forme

$$U = \left[(B_1 r^3 + C_1 r^{-1} + D_1 r \operatorname{Log} r) \,{}^{\sin}_{\cos}\beta - \frac{2D_1}{1-\sigma_1} r \beta \,{}^{\cos}_{\sin}\beta \right] +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{n+2} + C_n r^{-n} + D_n r^{-n+2}) \,{}^{\sin}_{\cos} n\beta .$$

On détermine d'après les formules (8.18) les contraintes, et l'on retrouve les constantes arbitraires de la solution générale sur la base des conditions : pour $r = {}^{a}_{0} R_r = B_r = 0$.

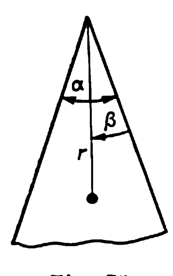


Fig. 76

8.4. Déterminer l'état de contrainte dans un barrage triangulaire infini sous l'action de la température $t_1 = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \varphi_k(\beta)$ (fig. 76).

De l'équation (8.19), on tire

$$T = \sum_{k=0}^{n} \frac{r^{k+2}}{k+2} \left[\sin(k+2)\beta \int_0^{\beta} \varphi_k(\beta) \cos(k+2)\beta \, d\beta - \right.$$

$$\left. - \cos(k+2)\beta \int_0^{\beta} \varphi_k(\beta) \sin(k+2)\beta \, d\beta \right] = \sum_{k=0}^{n} \frac{r^{k+2}}{k+2} g_k(\beta).$$

La fonction U selon les formules (6.13) est prise sous la forme:

$$U = r^2 (A_2 \cos 2\beta + B_2 \sin 2\beta + C_2 + D_2\beta) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} r^{k+2} [A_k \cos (k+2) \beta + B_k \sin (k+2) \beta + C_k \cos k\beta + D_k \sin k\beta].$$

Ensuite, sur la base des formules (8.18) on détermine les contraintes:

$$R_r = 2C_2 + 2D_2\beta - 2A_2 \cos 2B_2 \sin 2\beta - g_0 (\beta) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} r^k (k+1) [-(k+2) A_k \cos (k+2) \beta - (k+2) B_k \sin (k+2) \beta +$$

$$+ (2-k) C_k \cos k\beta + (2-k) D_k \sin k\beta + g_k (\beta)],$$

$$B_\beta = 2C_2 + 2D_2\beta + 2A_2 \cos 2\beta - 2B_2 \sin 2\beta - g_0 (\beta) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} (k+1)(k+2) r^k \Big[A_k \cos (k+2) \beta + B_k \sin (k+2) \beta +$$

$$+ C_k \cos k\beta + D_k \sin k\beta - \frac{g_k (\beta)}{k+2} \Big],$$

$$R_\beta = B_r = -D_2 + 2A_2 \sin 2\beta + 2B_2 \cos 2\beta + \frac{1}{2} g_0' (\beta) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} (k+1) r^k \Big[(k+2) A_k \sin (k+2) \beta - (k+2) B_k \cos (k+2) \beta +$$

$$+ kC_k \sin k\beta - kD_k \cos B k + \frac{g_k' (\beta)}{k+1} \Big].$$

Les constantes arbitraires se déterminent sur la base des conditions aux limites: pour $\beta = 0$ et $\beta = \alpha$ $R_\beta = B_\beta = 0$.

Dans la publication de G. Maslov sont étudiés les cas où la température varie en vertu des lois suivantes:

$$t = \varphi (\beta), \quad t = \sum_{k=2}^{n} r^k \varphi_k (\beta), \quad t = \sum_{k=2}^{n} r^{-k} \varphi_k (\beta), \quad t = r\varphi (\beta),$$

et l'on y fournit les diagrammes de variation des contraintes.

8.5. Déterminer l'état de contrainte dans une sphère creuse dont le rayon intérieur est a et le rayon extérieur b, soumise à l'action de la température $t = t (r)$.

En vertu des conditions de symétrie polaire, il ressort de façon évidente, que seul se manifeste le déplacement $u_r = u_r (r)$. Selon les équations (8.3) et (3.3b), il vient

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{d}{dr} \left(\frac{du_r}{dr} + \frac{2u_r}{r} \right) = \frac{K\alpha}{\lambda + 2G} \cdot \frac{dt}{dr}.$$

La solution générale de cette équation est:

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r^2} + \frac{K\alpha}{\lambda + 2G} \cdot \frac{1}{r^2} \int_0^r r^2 t \, dr.$$

A partir des équations (8.2), on obtient en coordonnées polaires:

$$\left.\begin{aligned} R_r &= \lambda\theta + 2G\frac{du_r}{dr} - K\alpha t = KC_1 - 4G\frac{C_2}{r^3} - \\ &\quad - \frac{4GK\alpha}{\lambda + 2G} \cdot \frac{1}{r^3} \int_0^r r^2 t \, dr; \\ B_\beta &= A_\alpha = \lambda\theta + 2G\frac{u_r}{r} - K\alpha t = KC_1 + 2G\frac{C_2}{r^3} + \\ &\quad + \frac{2GK\alpha}{\lambda + 2G} \cdot \frac{1}{r^3} \int_0^r r^2 t \, dr - \frac{2GK\alpha t}{\lambda + 2G}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

En vertu des conditions aux limites du problème $r = \frac{a}{b}$ $R_r = 0$, il vient:

$$C_1 = \frac{4G\alpha \int_a^b r^2 t \, dr}{(\lambda + 2G)(b^3 - a^3)},$$

$$C_2 = \frac{K\alpha}{\lambda + 2G}\left[\frac{a^3}{b^3 - a^3} \int_a^b r^2 t \, dr - \int_0^a r^2 t \, dr\right].$$

Les équations (a) deviennent en définitive:

$$R_r = \frac{4GK\alpha}{\lambda + 2G}\left[\frac{r^3 - a^3}{(b^3 - a^3) r^3} \int_a^b r^2 t \, dr - \frac{1}{r^3} \int_a^r r^2 t \, dr\right];$$

$$B_\beta = A_\alpha = \frac{2GK\alpha}{\lambda + 2G}\left[\frac{2r^3 + a^3}{(b^3 - a^3) r^3} \int_a^b r^2 t \, dr + \frac{1}{r^3} \int_a^r r^2 t \, dr\right].$$

Quant à l'équation (b) elle sera:

$$u_r = \frac{\alpha}{\lambda + 2G}\left[\frac{4Gr^3 + Ka^3}{(b^3 - a^3) r^3} \int_a^b r^2 t \, dr - \frac{K}{r^2} \int_a^r r^2 t \, dr\right].$$

Pour une sphère pleine on obtiendra la solution en posant $C_2 = a = 0$.

8.6. Déterminer les contraintes dans un corps de révolution cylindrique dues à $t = t(z, r)$, pour lequel l'axe z coïncide avec l'axe de rotation.

Dans ce cas, en absence de forces volumiques, on calcule les contraintes d'après les formules de la déformation asymétrique (problème 4.1), pour des corps dont la surface est sollicitée par une pression normale $K\alpha t$ d'intensité variant le long de l'axe du corps et en présence de forces fictives dues à la masse (8.3).

En posant

$$\nabla^2\nabla^2 \frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

et

$$\nabla^2 \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{2GK\alpha}{\lambda + 2G} t(z, r) = t_1(z, r),$$

où

$$\nabla^2(\ldots) = \frac{\partial^2 \ldots}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \ldots}{\partial r} + \frac{\partial^2 \ldots}{\partial z^2},$$

on obtient les contraintes d'après les formules:

$$\begin{aligned} R_r &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\lambda}{2(\lambda+G)} \nabla^2 U - \frac{\partial^2 (U-T)}{\partial r^2} - \nabla^2 T\right]; \\ B_\beta &= \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\lambda}{2(\lambda+G)} \nabla^2 U - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (U-T)}{\partial r} - \nabla^2 T\right]; \\ Z_z &= \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{3\lambda+4G}{2(\lambda+G} \nabla^2 U - \frac{\partial^2 (U-T)}{\partial z^2} \nabla^2 T\right]; \\ R_z = Z_r &= \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\lambda+2G}{2(\lambda+G)} \nabla^2 U - \frac{\partial^2 (U-T)}{\partial z^2}\right]^{*)}; \end{aligned} \quad \text{(a)}$$

dans ce cas

$$\frac{\lambda}{2(\lambda+G)} = \sigma, \quad \frac{3\lambda+4G}{2(\lambda+G)} = 2 - \sigma, \quad \frac{\lambda+2G}{2(\lambda+G)} = 1 - \sigma.$$

Les équations (a) vérifient les équations d'équilibre (8.3) et les équations de Beltrami-Mitchell [équations (8.5), voir problème 3.1].

La fonction U est choisie sous l'une des formes vérifiant l'équation biharmonique

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2 U = 0. \quad \text{(b)}$$

Donnons quelques solutions particulières de l'équation (b):

$$U(z, r) = \sum_{k=0}^{n} f_k(r) z^k,$$

où $f_k(r)$ est une fonction de r (problème 4.1);

$$U(z, r) = (C_1 + C_2 z + C_3 z^2 + C_4 z^3) \operatorname{Log} r;$$

$$U(z, r) = C(r^2 + z^2)^n,$$

---

*) Les formules (a) se déduisent de la solution générale des équations inhomogènes (8.3) en coordonnées cylindriques.

où $n = -1/2,\ 1,\ 1/2$;

$$U(z, r) = C(r^2 + z^2)^n z,$$

où $n = -3/2,\ -1/2,\ 1$;

$$U(z, r) = C\left[(r^2+z^2)^{-5/2} z^2 - \frac{1}{3}(r^2+z^2)^{-3/2}\right]$$

etc. (voir Eléments de théorie de l'élasticité [41]).

Les constantes arbitraires de la solution se déterminent à partir des conditions aux limites à la surface du corps:

$$Z_z = R_r = -K\alpha t,\ Z_r = 0.$$

8.7. Voir monographie [40].

Déterminer l'état de contrainte dans un demi-plan $x \geqslant 0$ engendré par une température irrégulière $t_1(x, y) = \frac{2GK\alpha}{\lambda+2G}\, t(x, y)$ (fig. 77).

Pour résoudre le problème on définit les fonctions t_1, T et U sous la forme d'intégrales de Fourier. Comme il est connu, la fonc-

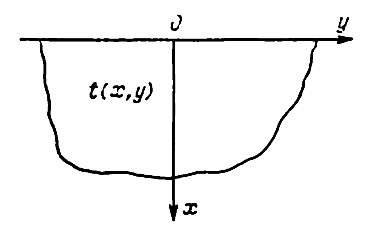


Fig. 77

tion $f(x, y)$, définie dans un domaine infini, peut être représentée sous forme d'intégrale de Fourier si cette fonction satisfait à la condition de Dirichlet et, en outre, à la condition

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)|\, dx\, dy = A,$$

où A est une grandeur finie.

Si la fonction $t(x, y)$ satisfait aux conditions mentionnées et est absolument intégrable, alors

$$t_1(x, y) = \\ = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} d\alpha_1\, d\alpha_2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} t(\xi, \eta) \cos\alpha_1(\xi - x)\cos\alpha_2(\eta - y)\, d\xi\, d\eta.$$

La fonction T qui satisfait à l'équation de Poisson prend la forme

$$T(x, y) = -\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\times$$

$$\times\left[\omega_1(x, \alpha_1, \alpha_2)\cos\alpha_2 y + \omega_2(x, \alpha_1, \alpha_2)\sin\alpha_2 y\right] d\alpha_1\, d\alpha_2,$$

ou

$$\omega_1(x, \alpha_1, \alpha_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} t(\xi, \eta)\cos\alpha_1(\xi - x)\cos\alpha_2\eta\, d\eta\, d\xi;$$

$$\omega_2(x, \alpha_1, \alpha_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} t(\xi, \eta)\cos\alpha_1(\xi - x)\sin\alpha_2\eta\, d\eta\, d\xi.$$

La fonction U est prise sous la forme:

$$U = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \left[\psi_1(x, \alpha_1, \alpha_2)\cos\alpha_2 y + \psi_2(x, \alpha_1, \alpha_2)\sin\alpha_2 y\right] d\alpha_1\, d\alpha_2,$$

où

$$\psi_1(x, \alpha_1, \alpha_2) = (A_1 + B_1 x)\, e^{-\alpha_2 x};$$

$$\psi_2(x, \alpha_1, \alpha_2) = (A_2 + B_2 x)\, e^{-\alpha_2 x}.$$

Les contraintes selon les formules (8.14) seront égales à:

$$X_x = -\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha_2^2 \Big\{\psi_1(x, \alpha_1, \alpha_2)\cos\alpha_2 y + \psi_2(x, \alpha_1, \alpha_2)\sin\alpha_2 y +$$

$$+ \frac{1}{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\left[\omega_1(x, \alpha_1, \alpha_2)\cos\alpha_2 y + \omega_2(x, \alpha_1, \alpha_2)\sin\alpha_2 y\right]\Big\} d\alpha_1\, d\alpha_2;$$

$$Y_y = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \Big\{\psi_1''(x, \alpha_1, \alpha_2)\cos\alpha_2 y + \psi_2''(x, \alpha_1, \alpha_2) + \sin\alpha_2 y +$$

$$+ \frac{1}{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\left[\omega_1''(x, \alpha_1, \alpha_2)\cos\alpha_2 y + \omega_2''(x, \alpha_1, \alpha_2)\sin\alpha_2 y\right]\Big\} d\alpha_1\, d\alpha_2;$$

$$X_y = -\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha_2 \Big\{-\psi_1'(x, \alpha_1, \alpha_2)\sin\alpha_2 y + \psi_2'(x_1\ \alpha_1, \alpha_2)\cos\alpha_2 y +$$

$$+ \frac{1}{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\left[\omega_1'(x, \alpha_1\ \alpha_2)\sin\alpha_2 y + \omega_2'(x, \alpha_1, \alpha_2)\cos\alpha_2 y\right]\Big\} d\alpha_1,\ d\alpha_2.$$

A partir des conditions aux limites pour $x=0$, $Y_x=0$, $X_x=0$, on obtient :

$$A_1=\frac{\omega_1(0,\ \alpha_1,\ \alpha_2)}{\alpha_1^2+\alpha_2^2};\quad A_2=\frac{\omega_2(0,\ \alpha_1,\ \alpha_2)}{\alpha_1^2+\alpha_2^2};$$

$$B_1=\frac{\omega_1'(0,\ \alpha_1,\ \alpha_2)+\alpha_2\alpha_1(0,\ \alpha_1,\ \alpha_2)}{\alpha_1^2+\alpha_2^2};$$

$$B_2=\frac{\omega_2'(0,\ \alpha_1,\ \alpha_2)+\alpha_2\omega_2(0,\ \alpha_1,\ \alpha_2)}{\alpha_1^2+\alpha_2^2}.$$

Sur la base de l'algorithme fourni on obtient la solution générale du problème, toutefois, les calculs sont très laborieux, car ils exigent des intégrations des fonctions compliquées.

8.8. Voir monographie [38], ch. VIII, § 2.

Déterminer les contraintes dans un demi-espace $z\geqslant 0$ considérant qu'il existe sur la surface une source ponctuelle de chaleur de puissance W_M.

On place l'origine des coordonnées à la source ponctuelle de chaleur. L'expression analytique du champ des températures engendré par cette source dans le corps et remplissant tout l'espace sera déterminée en résolvant l'équation (8.23) sous la forme (8.9) :

$$t = W_M/(4\pi kR), \tag{a}$$

où $R=\sqrt{r^2+z^2}$; W_M la puissance de la source de chaleur ; $k = \chi\rho c$.

La température du champ (a) peut s'appliquer au cas d'un demi-espace si l'on admet que la surface limitant le demi-espace ($z=0$) est isolée thermiquement de façon parfaite. En effet, le gradient de température

$$\frac{\partial t}{\partial z}=-\frac{W_M}{4\pi k}\cdot\frac{z}{R^3},$$

pour $z=0$ est nul, c'est-à-dire que le flux de chaleur dirigé normalement à la surface du demi-espace s'annule.

Pour trouver l'état de contrainte profitons du potentiel thermoélastique des déplacements F de l'équation (8.8).

Pour le problème considéré l'équation (8.8) sera prise sous la forme :

$$\nabla^2F=\frac{c}{R},\quad \text{où}\quad c=\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\cdot\frac{\alpha W_M}{4\pi k}. \tag{b}$$

L'intégrale particulière de l'équation (b) sera l'expression

$$F=\frac{c}{2}R,$$

ce qui se vérifie aisément compte tenu des égalités:

$$\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{z}{R}, \quad \frac{\partial R}{\partial r}=\frac{r}{R}.$$

Les contraintes se déterminent d'après les formules:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{R}_r &= 2G\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}-\nabla^2 F\right)=cG\left(\frac{z^2}{R^3}-\frac{2}{R}\right),\\
\overline{Z}_z &= 2G\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}-\nabla^2 F\right)=cG\left(\frac{r^2}{R^3}-\frac{2}{R}\right),\\
\overline{B}_\beta &= 2G\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial F}{\partial r}-\nabla^2 F\right)=-c\frac{G}{R},\\
\overline{R}_z &= \overline{Z}_r = 2G\frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial z}=-\frac{cGrz}{R^3}.
\end{aligned}\right\} \quad \text{(c)}$$

Toutes les contraintes pour $R\to\infty$ deviennent nulles. A la surface quand $z=0$ $\overline{R}_z=0$, mais il reste la contrainte normale $\overline{Z}_z=-cG/r$.

Pour éliminer cette contrainte superposons à la solution obtenue un second champ des contraintes défini par la fonction des déplacements de Love [4] prise sous la forme:

$$\varphi = A\,[r^2 \operatorname{Log}(R+z)+Rz]+B\,[z^2 \operatorname{Log}(R+z)-Rz],$$

où A et B représentent pour l'instant des constantes arbitraires.

Les tensions du second champ se déterminent d'après les formules:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{\overline{R}}_r &= \frac{2G}{1-2\sigma}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma\nabla^2\varphi-\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right)=\\
&=\frac{2G}{1-2\sigma}\cdot\frac{1}{R}\left[\left(2\sigma-\frac{r^2}{R^2}\right)(2A+B)\frac{2Bz}{R+z}\right];\\
\overline{\overline{Z}}_z &= \frac{2G}{1-2\sigma}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\sigma)\nabla^2\varphi-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right]=\\
&=\frac{2G}{1-2\sigma}\cdot\frac{1}{R}\left[\left(3-2\sigma+\frac{z^2}{R^2}\right)(2A+B)-2B\right];\\
\overline{\overline{B}}_\beta &= \frac{2G}{1-2\sigma}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left[\sigma\nabla^2\varphi-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right]=\\
&=\frac{2G}{1-2\sigma}\cdot\frac{1}{R}\left[(2\sigma-1)(2A+B)+\frac{2BR}{R+z}\right];\\
\overline{\overline{R}}_z &= \overline{\overline{Z}}_r=\frac{2G}{1-2\sigma}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left[(1-\sigma)\nabla^2\varphi-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right]=\\
&=\frac{2G}{1-2\sigma}\cdot\frac{r}{R}\left\{\left[\frac{2(1-\sigma)}{R+z}+\frac{z}{R^2}\right](2A+B)-\frac{2B}{R+z}\right\}.
\end{aligned}\right\} \quad \text{(d)}$$

Les constantes d'intégration A et B seront déterminées d'après les conditions: pour $z=0$ et, partant, pour $R=r$

$$Z_z=\overline{Z}_z+\overline{\overline{Z}}_z=0,\ R_z=\overline{R}_z+\overline{\overline{R}}_z=0.$$

En explicitant ces dernières égalités, il vient:

$$(3-2\sigma)(2A+B)-2B-(1-2\sigma)c/2=0,$$
$$2(1-\sigma)(2A+B)-2B=0,$$

d'où

$$2A+B=(1-\sigma)c/2;\ B=(1-\sigma)(1-2\sigma)c/2.$$

Maintenant selon les formules (d), on obtient:

$$\left.\begin{aligned}&\overline{\overline{R}}_r=cG\frac{1}{R}\left(2\frac{z+\sigma R}{R+z}-\frac{z^2}{R^2}\right);\quad \overline{\overline{Z}}_z=cG\frac{1}{R}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right);\\&\overline{\overline{B}}_\beta=\frac{cG}{R(R+z)}[R-(1-2\sigma)z];\quad \overline{\overline{R}}_z=\overline{\overline{Z}}_r=cG\frac{rz}{R^3},\end{aligned}\right\}\qquad(e)$$

et additionnant en fin de compte les deux champs des contraintes (c) et (e), on a:

$$\begin{aligned}R_r&=-2(1-\sigma)\frac{cG}{R+z};\\B_\beta&=2(1-\sigma)cG\left(\frac{1}{R+z}-\frac{1}{R}\right),\\Z_z&=0,\ R_z=Z_r=0.\end{aligned}\qquad(f)$$

Les déplacements se déterminent d'après les formules:

$$\begin{aligned}u_r&=\frac{\partial F}{\partial r}-\frac{1}{1-2\sigma}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial z}=c(1-\sigma)\frac{r}{R+z};\\u_z&=\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{1}{1-2\sigma}\left[2(1-\sigma)\nabla^2\varphi-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right]=c(1-\sigma)\,\mathrm{Log}\,(R+z).\end{aligned}\qquad(g)$$

Il s'ensuit de l'expression (g) que le déplacement u_r reste limité à l'infini, tandis que le déplacement u_z s'accroît indéfiniment. A l'origine des coordonnées (à la source de chaleur) les deux déplacements présentent une singularité.

▶ En dérivant les expressions (f) et (g) par rapport à z on peut obtenir le champ des contraintes et des déplacements dans le demi-espace soumis à l'action du dipôle thermique placé à l'origine des coordonnées (source et déversoir), dont l'axe coïncide avec l'axe z.

8.9. La température initiale d'une sphère de rayon a possède une symétrie polaire et est définie par la fonction $f(r)$. A la surface de la sphère la température est maintenue à 0°.

Déterminer la température d'un point quelconque à l'intérieur de la sphère pour $\tau>0$.

L'équation de conduction thermique (8.23) prend pour ce cas la forme:

$$\varkappa\left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\cdot\frac{\partial t}{\partial r}\right)=\frac{\partial t}{\partial\tau}.$$

Posant

$$t = v/r,$$

où

$$v = v(r, \tau),$$

on obtient l'équation

$$\varkappa \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{\partial v}{\partial \tau} \qquad \text{(a)}$$

au cas où les conditions aux limites sont:

$$v(0, \tau) = 0, \; v(a, \tau) = 0, \qquad \text{(b)}$$

et la condition initiale:

$$v(r, 0) = f(r). \qquad \text{(c)}$$

En résolvant l'équation (a), compte tenu des expressions (b) et (c), il vient

$$t(r, \tau) = \frac{2}{ar} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2\varkappa}{a^2}\tau} \sin \frac{n\pi r}{a} \int_0^a r f(r) \sin \frac{n\pi r}{a} \, dr.$$

Ensuite, pour le cas thermostatique, on peut se référer au cas du problème (8.5), pour le cas thermodynamique au cas du problème (10.6) compte tenu, en plus de la température, de la force d'inertie.

La température initiale de la sphère de rayon a et du milieu environnant est 0°. A partir de l'instant $\tau = 0$ la température du milieu environnant s'accroît linéairement dans le temps, de sorte que $t = b\tau$, où b est une constante. L'échange de chaleur avec le milieu s'effectue suivant la loi de Newton [équation (8.25)].

Chercher la distribution des températures à l'intérieur de la sphère en admettant que le problème est de symétrie polaire.

8.10. Un cylindre de rayon a et de longueur l, de température $t = f(r, z)$ est placé à l'instant $\tau = 0$ dans un milieu de température 0°. L'échange de chaleur avec le milieu environnant au travers la surface latérale et les bases du cylindre s'effectue suivant la loi de Newton.

Chercher la distribution des températures au sein du cylindre à tout moment du temps.

L'équation de conduction thermique (8.23) en coordonnées cylindriques et avec symétrie axiale prend la forme:

$$\varkappa \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial t}{\partial \tau}. \qquad \text{(a)}$$

Les conditions aux limites, selon l'équation (8.25), seront définies sous la forme:

$$\left.\begin{aligned} & k\frac{\partial t}{\partial z} - Ht|_{z=0} = 0, \quad k\frac{\partial t}{\partial z} + Ht|_{z=l} = 0, \\ & k\frac{\partial t}{\partial r} + Ht|_{r=a} = 0, \quad t(0, z, \tau) < \infty, \end{aligned}\right\} \quad \text{(b)}$$

la condition initiale est:

$$t(r, z, 0) = f(r, z). \quad \text{(c)}$$

En intégrant l'équation (a), compte tenu des expressions (b) et (c), il vient

$$t(r, z, \tau) = \sum_{k, n=1}^{\infty} A_{kn} J_0\left(\mu_k \frac{r}{a}\right)\left(\cos\frac{\nu_n z}{l} + \frac{p}{\nu_n}\sin\frac{\nu_n z}{l}\right) e^{-\varkappa\left(\frac{\nu_n^2}{l^2} + \frac{\mu_k^2}{a^2}\right)\tau},$$

où

$$A_{kn} = \frac{4\mu_k^2 \nu_n^2}{la^2(\mu_k^2 + H_1 a)[p(p+2) + \nu_n^2]} \int_0^l \int_0^a rf(r, z) \times$$

$$\times J_0\left(\frac{\mu_k r}{a}\right)\left(\cos\frac{\nu_n z}{l} + \frac{p}{\nu_n}\sin\frac{\nu_n z}{l}\right) dz\, dr;$$

$$H_1 = H/k; \; p = Hl/k;$$

μ_k étant les racines positives de l'équation

$$\mu J_0'(\mu) + H_1 a J_0(\mu) = 0;$$

ν_n les racines positives de l'équation

$$2\operatorname{tg}\nu = \nu/p - p/\nu.$$

Une grande information sur l'application des fonctions de Bessel aux problèmes de la théorie de l'élasticité et de la conduction thermique peut être puisée dans la monographie [42].

CHAPITRE 9
PROBLÈME DE HERTZ

Les problèmes de Hertz sont en rapport avec la recherche d'états de contrainte et de déformation dans la zone de contact de deux corps.

Outre les relations générales de la théorie de l'élasticité on utilise largement, lors de la résolution des problèmes de Hertz, les formules données ci-dessous.

I. ACTION DE MATRICES SUR UN DEMI-PLAN ÉLASTIQUE

Lors de l'étude de l'action sur un demi-plan élastique ($y \geqslant 0$) d'un corps parfaitement rigide servant de matrice dans des conditions d'une déformation plane, on se sert de la formule de Flaman (problème 6.4), fig. 78:

$$u_y(x, 0) = -\frac{2(1-\sigma^2)P}{\pi E} \operatorname{Log} \frac{x}{h} - \frac{(1+\sigma)P}{\pi E} = -\frac{2(1-\sigma^2)P}{\pi E} \operatorname{Log}|x| + C,$$

$$u_x(x, 0)_{x \gtrless 0} = \mp \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{2E} P. \qquad (9.1)$$

Si la force P est appliquée à la matrice présentant une base plate à excentricité e, l'épure des déplacements verticaux des points

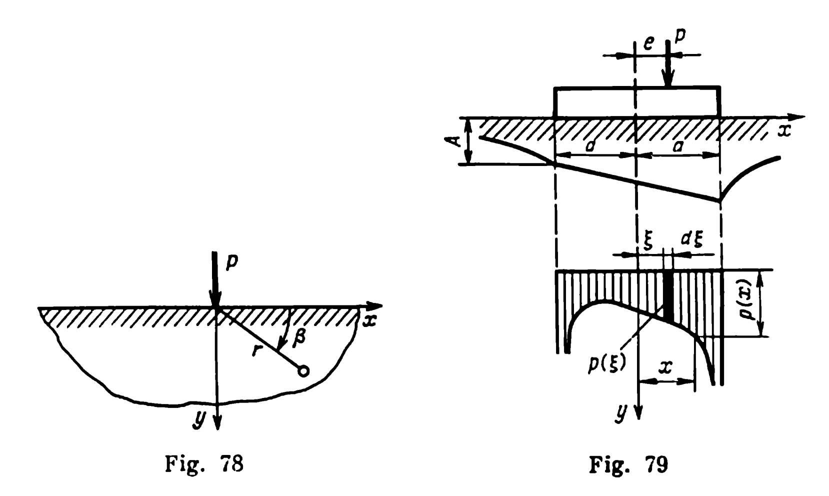


Fig. 78 Fig. 79

de la base aura alors la forme trapézoïdale définie par l'expression

$$u_y(x, 0) = A + Bx \qquad (9.2)$$

(fig. 79).

L'équation d'équilibre a la forme:

$$\int_{-a}^{a} p(\xi)\, d\xi = P, \quad \int_{-a}^{a} p(\xi)\, \xi\, d\xi = Pe. \qquad (9.3)$$

En négligeant les frottements le long de la base de la matrice, on obtient pour la détermination des contraintes normales suivant

la base les conditions suivantes:
pour $y = 0$, $X_y = 0$,
pour $y = 0$ et $-a \leqslant x \leqslant a$,

$$u_y(x, 0) = -\frac{2(1-\sigma^2)}{\pi E} \int_{-a}^{a} p(\xi) \operatorname{Log} |x-\xi| \, d\xi = A + Bx \,^{*}), \quad (9.4)$$

pour $y = 0$ et $-a > x > a$, $p(x) = 0$.

Si la base de la matrice est limitée par la courbe $y_1 = -f_1(x)$, la pression $p(x)$ sur le tronçon donné de contact $-a \leqslant x \leqslant a$ s'obtient en résolvant l'équation intégrale

$$\int_{-a}^{a} p(\xi) \operatorname{Log} |1 - x/\xi| \, d\xi + f(x) = C, \quad (9.5)$$

où

$$f(x) = -y_1(x)/\vartheta, \quad \vartheta = \pi E/[2(1-\sigma^2)].$$

La solution de l'équation (9.5) donnée par I. Chtaerman prend la forme

$$p(x) = -\frac{1}{\pi^2} \sqrt{a^2 - x^2} \int_{-a}^{a} \frac{f'(\xi)}{\sqrt{a^2-\xi^2}} \frac{d\xi}{\xi - x} \quad (9.6)$$

à la condition que

$$\int_{-a}^{a} \frac{f'(\xi) \, d\xi}{\sqrt{a^2-\xi^2}} = 0 \quad (9.7)$$

exprimant l'absence dans $p(x)$ d'autres singularités que celle du type logarithmique.

Au cours de l'étude du problème de l'action de la matrice sur un demi-plan élastique I. Chtaerman proposa un nouveau modèle théorique de la base, qui constitue une généralisation du modèle de Winkler-Fuss de la théorie de l'élasticité, se traduisant par l'adjonction aux déplacements de la formule (9.4) de déplacements complémentaires engendrés par des déformations locales de la surface de base suivant la loi de Winkler.

De la sorte que

$$u_y(x, 0) = \frac{1}{k} p(x) - \frac{2(1-\sigma^2)}{\pi E} \int_{-a}^{a} p(\xi) \operatorname{Log} |x-\xi| \, d\xi = A + Bx. \quad (9.8)$$

Dans le cas considéré la distribution des contraintes $p(x)$ suivant la base de la matrice se ramène à la résolution de l'équation

---

*) La constante C de la formule (9.1) est incluse dans A.

intégrale de Fredholm de deuxième ordre:

$$p(x) - \lambda \int_{-a}^{a} p(\xi) \operatorname{Log} |x - \xi| \, d\xi = A + Bx,$$

où $\lambda = \frac{2(1-\sigma^2)k}{\pi E}$; k (g/cm³) étant le facteur de déformabilité de la base élastique.

La solution de l'équation (9.8) est donnée par Chtaerman. L'étude du modèle théorique montre que les contraintes limites sont des grandeurs finies. Pour $k = \infty$, l'équation (9.8) se transforme en l'équation (9.4); pour $E = \infty$, on aboutit à la méthode du facteur de déformabilité de la base élastique ou méthode de Winkler utilisée largement dans le calcul des poutres élastiques et des matrices (fondations parfaitement rigides).

II. ACTION DE MATRICES SUR UN DEMI-ESPACE ÉLASTIQUE

Dans l'étude de l'action de matrice sur un demi-espace élastique ($z \geqslant 0$), on utilise les formules de Boussinesq (problème 4.3): pour $z = 0$ et $R = r$ (voir fig. 22)

$$u_z(x, y, 0) = \frac{(1-\sigma)P}{2\pi G r} = \frac{(1-\sigma^2)P}{\pi E r}, \tag{9.9}$$

$$u_r(x, y, 0) = -\frac{(1-2\sigma)P}{4\pi G r} = -\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)P}{2\pi E r}. \tag{9.9''}$$

Si la force P est appliquée à la matrice présentant une base plate avec des excentricités e_x et e_y par rapport aux axes y et x, l'épure des déplacements verticaux des points de la base doit être limitée par le plan

$$u_z(x, y, 0) = A + Bx + Cy. \tag{9.10}$$

Les équations d'équilibre ont la forme:

$$\begin{aligned} &\iint_F p(\xi, \eta)\, d\xi d\eta = P, \\ &\iint_F p(\xi, \eta)\, \xi d\xi d\eta = Pe_x = M_y, \\ &\iint_F p(\xi, \eta)\, \eta d\xi d\eta = Pe_y = M_x, \end{aligned} \tag{9.11}$$

où F est l'aire de la base de la matrice.

En négligeant les frottements le long de la base de la matrice, on obtient pour la détermination des contraintes normales suivant la base les conditions ci-dessous:
pour $z = 0$, $X_z = Y_z = 0$,
pour $z = 0$ dans les limites de l'aire (zone) F,

$$u_z(x, y, 0) = \frac{1-\sigma^2}{\pi E} \iint_F \frac{p(\xi, \eta)\, d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2}} = A + Bx + Cy, \quad (9.12)$$

pour $z = 0$ à l'extérieur de l'aire F, $p(x, y) = 0$, où A, B, C sont les coefficients déterminant la position du plan de base de la matrice dans la déformation.

Les solutions fermées du problème ainsi posé ne se présentent que pour les cas où l'aire de la base de la matrice est limitée par une ellipse ou un cercle (problème 9.3).

Pour tenir compte des pressions aussi bien normales $p(x, y) = Z_z(x, y, 0)$ que tangentielles $t_x(x, y) = X_z(x, y, 0)$ et $t_y(x, y) = Y_z(x, y, 0)$ suivant le plan de contact de la matrice avec le demi-espace, il est nécessaire de recourir aux solutions générales des équations de Lamé (4.23)-(4.31), voir problème 9.7.

III. CONTACT DE DEUX CORPS ÉLASTIQUES

Au cas de contact de deux corps élastiques limités par les surfaces $z_1 = f_1(x, y)$ et $z_2 = f_2(x, y)$, on utilise les équations intégrales permettant de déterminer les pressions $p(\xi, \eta)$ à l'endroit de contact [43]:

$$\delta - f_1(x, y) + f_2(x, y) = -u_z^{(1)}(x, y, 0) + u_z^{(2)}(x, y, 0) = \\ = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1-\sigma_2^2}{E_2} - \frac{1-\sigma_1^2}{E_1}\right] \iint_F \frac{p(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}, \quad (9.13)$$

où δ est le rapprochement d'axes des corps élastiques sollicité à la compression à l'endroit de contact; F est l'aire de contact; $u_z^{(i)}(x, y, 0)$ les déplacements élastiques des points A_i des corps (problème 9.1) calculés suivant les formules (9.12).

Problèmes

9.1. Problème de Hertz (1881).

Etudier l'état de contrainte de deux longs cylindres en contact dont les axes sont parallèles, et qui sont serrés l'un contre l'autre suivant la longueur par des forces uniformément réparties d'intensité p.

Soient deux poins A_1 et A_2 à la surface des cylindres situés à la distance x du plan passant par les axes de ces derniers (fig. 80,*a*). Avant la déformation la distance entre ces points est égale à

$$y_1 + y_2 \approx x^2/(2R_1) + x^2/(2R_2) = \beta x^2,$$

où

$$\beta = 1/(2R_1) + 1/(2R_2) = (R_1 + R_2)/(2R_1R_2).$$

Sous la charge p les cylindres se compriment à l'endroit de contact en constituant le plan de contact en forme de bande droite de

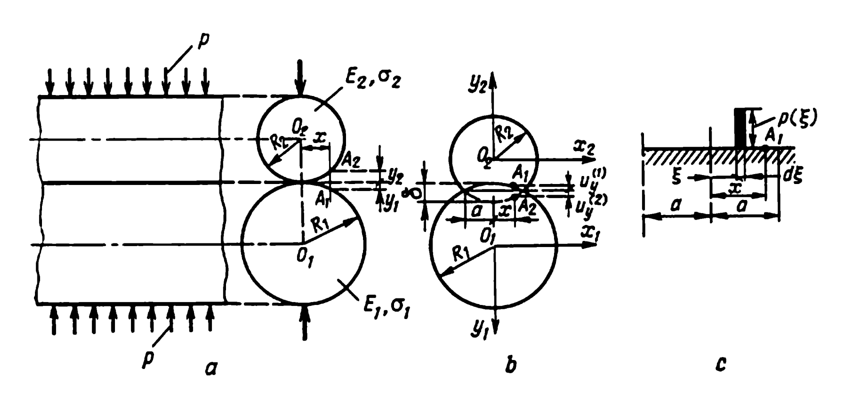


Fig. 80

largeur $2a$, les axes des cylindres se rapprochant de la grandeur δ (fig. 80, *b*).

Si $a \geqslant \xi$ les points A_1 et A_2 se confondront et

$$\delta - u_y^{(1)} - u_y^{(2)} = y_1 + y_2 = \beta x^2,$$

soit

$$u_y^{(1)} + u_y^{(2)} = \delta - \beta x^2,$$

où $u_y^{(1)}$ est la projection verticale du déplacement du point A_1; $u_y^{(2)}$ de celui du point A_2.

Si la largeur du plan de contact est petite devant le rayon des cylindres, chacun d'eux peut être assimilé de façon approchée à un demi-plan élastique et les déplacements $u_y^{(1)}$ et $u_y^{(2)}$ peuvent être calculés en utilisant la formule (9.1).

En supposant la pression sur l'aire de contact variable, il vient

$$\int_{-a}^{a} p(\xi)\, d\xi = p.$$

Sous l'action de la charge $p(\xi)$ sollicitant la bande de largeur $d\xi$ le point A_1 (fig. 80,*c*) se déplace dans le sens vertical de la grandeur (9.1)

$$du_y^{(1)} = -\frac{2(1-\sigma_1^2)}{\pi E_1} p(\xi)\, d\xi \operatorname{Log} \frac{|x-\xi|}{R_1} - \frac{1+\sigma_1}{\pi E_1} p(\xi)\, d\xi =$$

$$= -\frac{2(1-\sigma_1^2)}{\pi E_1}\left[\operatorname{Log}|x-\xi| + \frac{1}{2(1-\sigma_1)} - \operatorname{Log} R_1\right] p(\xi)\, d\xi;$$

le déplacement total est égal à

$$u_y^{(1)} = -\frac{2(1-\sigma_1^2)}{\pi E_1}\left\{\int_{-a}^{a} p(\xi) \operatorname{Log}|x-\xi|\, d\xi + \left[\frac{1}{2(1-\sigma_1)} - \operatorname{Log} R_1\right] p\right\}.$$

et, de façon analogue, on obtient $u_y^{(2)}$ en substituant l'indice 2 à l'indice 1.

En additionnant $u_y^{(1)}$ et $u_y^{(2)}$, il vient

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{1-\sigma_1^2}{E_1} + \frac{1-\sigma_2^2}{E_2}\right)\int_{-a}^{a} p(\xi) \operatorname{Log}|x-\xi|\, d\xi = \beta x^2 + C,$$

où par C est désignée la somme des termes indépendant de x.

Par dérivation en x et exclusion du secteur d'intégration $x - \varepsilon_1 < \xi < x + \varepsilon_2$, quand ε_1 et ε_2 tendent vers zéro, tandis que $\lim (\varepsilon_2/\varepsilon_1) = 1$ et l'expression sous le signe somme pour $\xi = x$ tend vers l'infini, l'équation intégrale peut être mise sous la forme:

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{1-\sigma_1^2}{E_1} + \frac{1-\sigma_2^2}{E_2}\right)\int_{-a}^{a} \frac{p(\xi)}{x-\xi}\, d\xi = 2\beta x. \qquad \text{(a)}$$

En résolvant l'équation (a) Hertz a trouvé que

$$p(x) = \frac{p_{\max}}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

où

$$p_{\max} = 2p/(\pi a); \qquad a = \sqrt{\frac{4pR_1R_2}{\pi(R_1+R_2)}\left(\frac{1-\sigma_1^2}{E_1} + \frac{1-\sigma_2^2}{E_2}\right)}.$$

La contrainte de compression maximale $p_{\max}$ se manifestera au milieu de la bande de contact.

9.2. Problème de Hertz (1881).

Examiner les déformations et les contraintes dans la zone de contact de deux sphères serrées l'une contre l'autre par les forces P.

Soient deux points A_1 et A_2 sur les surfaces des sphères, situés à la distance ρ de l'axe z passant par les centres des sphères (fig. 81,*a*). Avant la déformation la distance entre ces points est:

$$\zeta_1 + \zeta_2 = \rho^2/(2R_1) + \rho^2/(2R_2) = \beta\rho^2,$$

où

$$\beta = 1/(2R_1) + 1/(2R_2) = (R_1 + R_2)/(2R_1R_2).$$

Sous l'action de la charge P les sphères se compriment à l'endroit de contact en constituant une aire de contact en forme de cercle de rayon a, les centres des sphères se rapprochant de la grandeur δ.

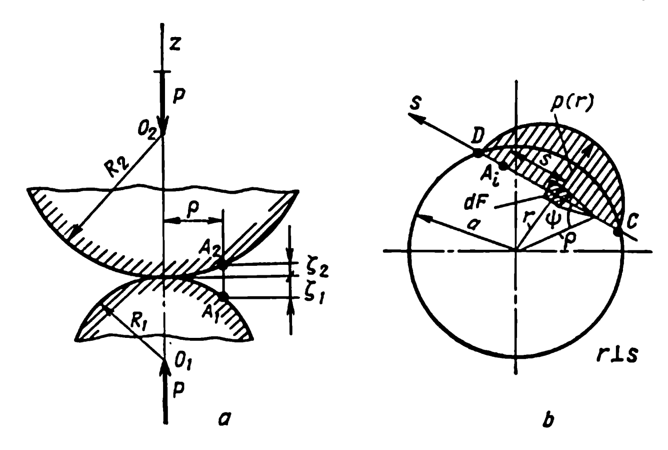


Fig. 81

Si $a \geqslant \rho$ les points A_1 et A_2 se confondront et l'on aura (problème 9.1)

$$u_z^{(1)} + u_z^{(2)} = \delta - \beta\rho^2, \tag{a}$$

où $u_z^{(1)}$ et $u_z^{(2)}$ sont les projections verticales des déplacements des points A_1 et A_2.

En assimilant approximativement les sphères à des demi-espaces élastiques, on peut trouver les projections verticales des déplacements d'après la formule (9.9):

$$u_z^{(i)} = \iint_F \frac{1-\sigma_i^2}{E_i} \cdot \frac{p(r)}{s}\, dF,$$

où $p(r)$ est la pression à la distance r de l'axe z pour laquelle

$$\iint_F p(r)\, dF = P;$$

s la distance du point A_i, où se manifeste le fléchissement, jusqu'au point d'application de la charge $p(r)\, dF$; $dF = s\, ds\, d\psi$, $r = \rho \sin \psi$ (fig. 81,*b*).

En composant la somme des projections verticales des déplacements (a), on obtient l'équation intégrale

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\sigma_1^2}{E_1}+\frac{1-\sigma_2^2}{E_2}\right)\iint_F \frac{p(r)}{s}\,dF=\delta-\beta\rho^2, \quad \text{soit}$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\sigma_1^2}{E_1}+\frac{1-\sigma_2^2}{E_2}\right)\iint_F p(r)\,ds\,d\psi=\delta-\beta\rho^2.$$

En résolvant cette équation Hertz a trouvé que

$$p(r)=\frac{p_{max}}{a}\sqrt{a^2-r^2},$$

où

$$p_{max}=3p/(2\pi a^2);$$

$$a=\sqrt[3]{\frac{3PR_1R_2}{4(R_1+R_2)}\left(\frac{1-\sigma_1^2}{E_1}+\frac{1-\sigma_2^2}{E_2}\right)}.$$

Le rapprochement des centres des sphères est

$$\delta=\left(\frac{1-\sigma_1^2}{E_1}+\frac{1-\sigma_2^2}{E_2}\right)\frac{\pi a}{2}p_{max}.$$

La contrainte de compression maximale se manifeste au centre de l'aire de contact ($r=0$): le matériau est dans ce cas sollicité

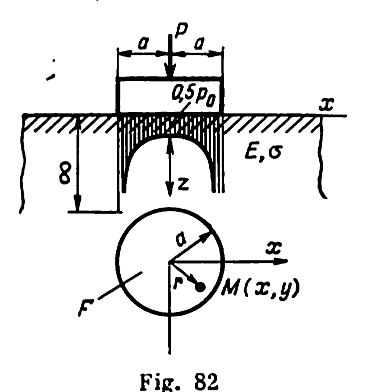


Fig. 82

par une pression hydrostatique. La contrainte d'extension maximale se concentre sur le contour de l'aire de contact et, pour $E_1 = E_2 = E$ et $\sigma_1 = \sigma_2 = 0{,}3$ est égale à

$$Z_{z=0}=0{,}133p_{max}.$$

9.3. Problème de Schteicher.

Déterminer l'état de contrainte apparaissant dans un demi-espace élastique $z \geqslant 0$ sous l'action d'une matrice circulaire de rayon a dont le poids est P (fig. 82).

Selon le problème (4.3)

$$u_z = \frac{P}{4\pi GR}\left[2(1-\sigma) + \frac{z^2}{R^2}\right].$$

A la surface pour $z = 0$

$$u_{z=0} = (1-\sigma)\,P/(2\pi Gr) = (1-\sigma^2)P/(\pi Er),$$

où $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

Comme l'affaissement de tout point de la matrice est le même.

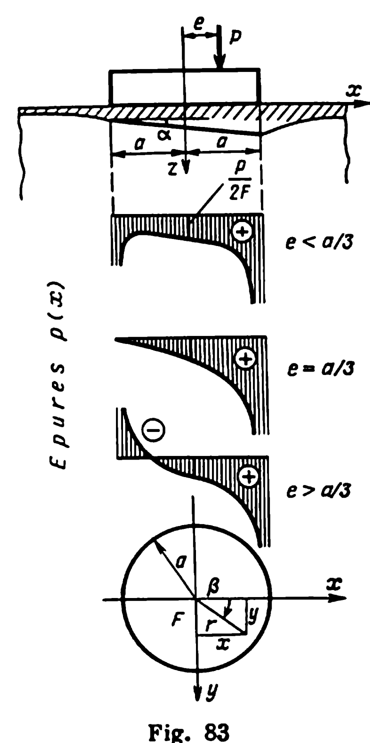


Fig. 83

$$u_{z=0} = \text{const} = \frac{1}{\pi E_1}\int_F \frac{p(x, y)\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \text{(a)}$$

où $E_1 = E/(1-\sigma^2)$; $p(x, y)$ étant la pression cherchée au point de coordonnées x, y.

En résolvant l'équation (a) avec

$$P = \int_F p(x, y)\,dx\,dy,$$

il vient

$$p(x, y) = \frac{p_0}{2\sqrt{1-r^2/a^2}},$$

où

$$p_0 = P/(\pi a^2).$$

L'épure des pressions est donnée sur la figure 82.

▶Chercher la solution du problème de Boussinesq (1885) pour une matrice elliptique chargée en son centre par une force P.

Réponse : $p(x, y) = \dfrac{P}{2\pi ab\sqrt{1-(x/a)^2-(y/b)^2}}$

où a et b sont des demi-axes de l'ellipse.

9.4. Problème de Egorov (1938).

Déterminer l'état de contrainte engendré dans un demi-espace élastique $z \geqslant 0$ sous l'action d'une matrice de forme circulaire de rayon a chargée par la force P appliquée avec une excentricité e (fig. 83).

Conditions de résolution du problème:

pour $z = 0$, $Y_z = X_z = 0$;

pour $z = 0$ et $r = \sqrt{x^2+y^2} \leqslant a$,

$$u_{z=0} = \frac{1}{\pi E_1}\int_F \frac{p(x, y)\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = A + Bx;$$

pour $z=0$ et $r=\sqrt{x^2+y^2}>a$,

$$p(x, y)=0.$$

Pour obtenir la solution, on établit les équations d'équilibre:

$$\sum Z=0,\quad \int_F p(x, y)\,dx\,dy=P;$$

$$\sum M_y=0,\quad \int_E p(x, y)\,x\,dx\,dy=Pe;$$

$$\sum M_x=0,\quad \int_F p(x, y)\,y\,dx\,dy=0.$$

Les solutions satisfaisant aux conditions du problème prennent la forme:

$$p(r)=\frac{1+3\frac{er}{a^2}\cos\beta}{2\pi a\sqrt{a^2-r^2}}P;$$

$$u_{z=0}(r)=\frac{1-\sigma^2}{2Ea}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{er}{a^2}\cos\beta+1\right)P;$$

$$\text{angle}\ \alpha=\frac{3}{4}\cdot\frac{1-\sigma^2}{Ea^3}Pe.$$

Pour $\beta=0$ et $r=x$ les contraintes se déterminent d'après la formule

$$p(x)=\frac{P}{\pi a^2}\cdot\frac{1+3\frac{xe}{a^2}}{2\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}. \tag{a}$$

Suivant la formule de la compression excentrée

$$p(x)=\frac{P}{\pi a^2}\left(1+4\frac{xe}{a^2}\right).$$

Selon la formule (a) pour $x=-a$ et $e=a/3$ les contraintes d'extension sous la matrice sont nulles vu que

$$\lim_{x\to(-a)}\frac{1+x/a}{\sqrt{1-(x/a)^2}}=\lim_{x\to(-a)}\frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\lim_{x\to(-a)}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=0.$$

▶En utilisant la solution de Gorbounov-Passadov étudier l'action d'une matrice plate $a/b=5$ sur un demi-espace élastique $z\geqslant 0$ (fig. 84).

Conseil. Utiliser les formules

$$u_z(0, y, 0) = \frac{1-\sigma^2}{E} k_0 \left(\frac{a}{b}\right) \frac{P}{\sqrt{F}}, \quad \alpha = \frac{1-\sigma^2}{E} k_1 \left(\frac{a}{b}\right) \frac{M_y}{a^3}$$

et les tables quand $a/b = 1 \div 10$ pour les grandeurs $k_0(a/b)$ et $k_1(a/b)$.

9.5. Problème de Sadovski (1928).

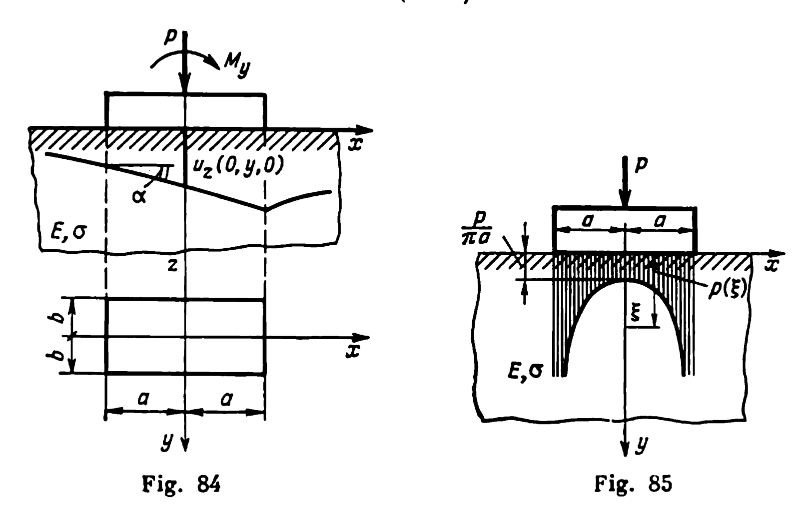


Fig. 84

Fig. 85

Déterminer l'état de contrainte se manifestant dans un demi-plan élastique $y \geqslant 0$ sous l'action d'une matrice de largeur $2a$ dont le poids est P (fig. 85).

On négligera les frottements suivant le plan de joint de la matrice dans la détermination des pressions normales.

En utilisant la formule (9.1) il faut tenir compte de ce que la grandeur h est variable, l'affaissement dû à la distribution de la charge se déterminant d'après la formule

$$u_y(x, 0) = -\frac{2(1-\sigma)^2}{\pi E} \int_{-a}^{a} p(\xi) \operatorname{Log}|x-\xi| d\xi.$$

Conditions de la résolution du problème:
pour $y = 0$, $X_y = 0$;
pour $y = 0$ et $-a \leqslant x \leqslant a$,

$$-\frac{2(1-\sigma)^2}{\pi E} \int_{-a}^{a} p(\xi) \operatorname{Log}|x-\xi| d\xi = A;$$

pour $y = 0$ et $-a > x > a$, $p(\xi) = 0$.

En établissant l'équation d'équilibre de la matrice ($\sum Y = 0$), il vient

$$\int_{-a}^{a} p(\xi)\, d\xi = P.$$

La solution satisfaisant aux conditions du problème prend la forme :

$$p(x) = \frac{P}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{2q_0}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \bar{x}^2}},$$

où

$$q_0 = P/(2a),\ \bar{x} = x/a.$$

9.6. Problème de Florine (1936).

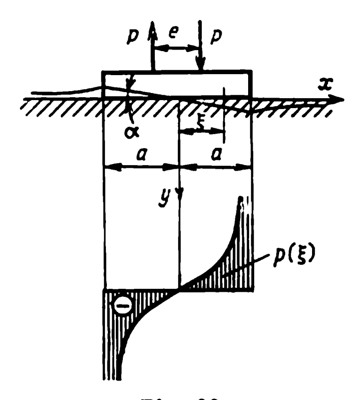


Fig. 86

Déterminer l'état de contrainte se manifestant dans un demi-plan élastique $y \geqslant 0$ sous une matrice de largeur $2a$ à laquelle est appliquée un moment $M = Pe$ (fig. 86).

Conditions de résolution du problème :
pour $y = 0$ $X_y = 0$;
pour $y = 0$ et $-a \leqslant x \leqslant a$

$$-\frac{2(1-\sigma^2)}{\pi E} \int_{-a}^{a} p(\xi) \operatorname{Log}|x - \xi|\, d\xi = Bx;$$

pour $y = 0$ et $\begin{cases} \infty > x > a, \\ -a > x > -\infty, \end{cases}$

$$p(\xi) = 0.$$

En établissant l'équation d'équilibre de la matrice ($\sum M_z = 0$), il vient:

$$\int_{-a}^{a} p(\xi)\,\xi\,d\xi = M.$$

La solution satisfaisant aux conditions du problème prend la forme:

$$p(x) = \frac{2M}{\pi a^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}; \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{4(1-\sigma^2)}{\pi E a^2}M.$$

9.7. Problème de Léonov (1953).

Déterminer la pression sous la matrice ayant la forme d'un cercle de rayon a s'exerçant sur un demi-espace élastique $z \geqslant 0$ si l'on connaît les forces tangentielles dans la zone de contact $t(r)$ dirigées suivant le rayon mené de l'origine des coordonnées vers le point considéré.

Selon l'équation (4.30) les déplacements élastiques sont

$$u_{x,y,z} = \psi_{1,2,3} + z\frac{\partial\chi}{\partial x, y, z}, \tag{a}$$

où $\nabla^2\psi_i = 0$;

$$\frac{\partial\chi}{\partial z} = \frac{1}{4\sigma-3}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \frac{\partial\psi_2}{\partial y} + \frac{\partial\psi_3}{\partial z}\right). \tag{b}$$

Désignons les contraintes sur le plan $z = 0$ par:

$$X_z(x, y, 0) = X(x, y);\ Y_z(x, y, 0) = Y(x, y);$$
$$Z_z = (x, y, 0) = -p(x, y).$$

Selon la loi de Hooke et les équations (a)

$$\left.\frac{\partial\psi_1}{\partial z} + \frac{\partial(\psi_3+\chi)}{\partial x}\right|_{z=0} = \frac{X}{G},\quad \left.\frac{\partial\psi_2}{\partial z} + \frac{\partial(\psi_1+\chi)}{\partial y}\right|_{z=0} = \frac{Y}{G}. \tag{c}$$

En dérivant et en additionnant les équations (c), il vient

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\psi_3+\chi) = \frac{1}{G}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right),$$

soit, compte tenu de ce que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\psi_3+\chi) = -\frac{\partial^2(\psi_3+\chi)}{\partial z^2},$$

on aboutit à l'équation

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \frac{\partial\psi_2}{\partial y} - \frac{\partial(\psi_3+\chi)}{\partial z}\right] = \frac{1}{G}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right).$$

Cette équation permet de déterminer la fonction harmonique entre crochets [ψ] d'après sa dérivée normale sur le plan $z = 0$ en utilisant la formule

$$\psi = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\infty} \frac{\psi'_z(\xi, \eta, 0)}{R} \, d\xi \, d\eta, \tag{d}$$

où

$$R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}.$$

En posant que toutes les fonctions disparaissent à l'infini, il vient d'après la formule (d)

$$\psi = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - \frac{\partial (\psi_3 + \chi)}{\partial z} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi G} \iint_{\infty} \frac{X'_\xi(\xi, \eta) + Y'_\eta(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}} \, d\xi \, d\eta. \tag{e}$$

Sur la base de l'expression (b), on obtient au lieu de l'équation (e) l'équation

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial z} + 2(1-\sigma) \frac{\partial \chi}{\partial z} = \frac{1+\sigma}{2\pi E} \iint_{\infty} \frac{X'_\xi + Y'_\eta}{R} \, d\xi \, d\eta. \tag{f}$$

La contrainte normale sur le plan, suivant la loi de Hooke et l'équation (b), devient égale à

$$p(x, y) = -\frac{E}{1+\sigma} \left[\frac{\partial \psi_3}{\partial z} + (1-2\sigma) \frac{\partial \chi}{\partial z} \right]_{z=0}. \tag{g}$$

Eliminons des formules (f) et (g) la fonction $\frac{\partial \chi}{\partial z}$:

$$\left.\frac{\partial \psi_3}{\partial z}\right|_{z=0} = -\frac{2(1-\sigma^2)}{E} p(x, y) - \frac{(1-2\sigma)(1+\sigma)}{2\pi E} \iint_{\infty} \frac{X'_\xi + Y'_\eta}{r} \, d\xi \, d\eta, \tag{h}$$

où

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}.$$

Selon l'expression (a) les déplacements sur le plan seront égaux à

$$u_x^0 = \psi_1(x, y, 0), \quad u_y^0 = \psi_2(x, y, 0), \quad u_z^0 = \psi_3(x, y, 0).$$

Déterminons la déformation de la surface du demi-espace élastique sous l'action des forces tangentielles données $t(r)$.

Introduisons la fonction

$$T(r) = \int_r^{\infty} t(r) \, dr.$$

Dans ce cas

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -t(r)\cos\beta = -X; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = -t(r)\sin\beta = -Y;$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\nabla_{xy}^2 T.$$

La formule (h) quand $p(x, y) = 0$ devient

$$\left.\frac{\partial \psi_3}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{(1-2\sigma)(1+\sigma)}{2\pi E} \iint_{\infty} \frac{\nabla_{\xi\eta}^2 T}{r} \, d\xi \, d\eta = \frac{\partial u_z^0}{\partial z}. \tag{i}$$

On considérera dans la suite les fonctions T et ψ_3 comme disparaissant à l'infini. En appliquant à ψ_3 la formule (d) et en dérivant par rapport à z, il vient

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial z} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \iint_{\infty} \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \psi_3(\xi, \eta, 0)}{\partial z} \, d\xi \, d\eta,$$

et on aboutit à la formule donnant la solution du problème de Dirichlet pour un demi-espace $z \geqslant 0$:

$$\psi_3(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \lim_{s \to \infty} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \iint_{s} \frac{\psi_3(\xi, \eta, 0)}{R} \, d\xi \, d\eta. \tag{j}$$

Il s'ensuit des formules (j) que

$$\left.\frac{\partial \psi_3}{\partial z}\right|_{z=0} = -\frac{1}{2\pi} \lim_{s \to \infty} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \iint_{s} \frac{\psi_3(\xi, \eta, 0)}{r} \, d\xi \, d\eta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{s \to \infty} \nabla_{xy}^2 \iint_{s} \frac{\psi_3(\xi, \eta, 0)}{r} \, d\xi \, d\eta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iint_{\infty} \frac{1}{r} \nabla_{\eta\xi}^2 \psi_3(\xi, \eta, 0) \, d\xi \, d\eta. \tag{k}$$

En confrontant les formules (i) et (k), on trouve l'affaissement de la surface du demi-espace sollicité par les seuls efforts tangentiels:

$$u_z^0(t) = \frac{(1-2\sigma)(1+\sigma)}{E} T(r).$$

En désignant l'affaissement entraîné par la pression normale $p(x, y)$ au moyen de $u_z^0(p)$, il vient

$$u_z^0(p) + u_z^0(t) = Z(r),$$

où $Z(r)$ est l'équation de la surface de la matrice enfoncée, soit

$$u_z^0(p) = Z(r) - u_z^0(t).$$

La pression $p(r)$ est calculée d'après la formule:

$$p(r)=\frac{C}{2\pi\sqrt{a^2-r^2}}-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}d\beta\int_0^{\Phi}\left\{\frac{E}{1-\sigma^2}\left[Z''\left(\sqrt{r^2\sin^2\beta+u^2}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{Z'\left(\sqrt{r^2\sin^2\beta+u^2}\right)}{\sqrt{r^2\sin^2\beta+u^2}}\right]+\frac{1-2\sigma}{1-\sigma}\left[t'\left(\sqrt{r^2\sin^2\beta+u^2}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{t\left(\sqrt{r^2\sin^2\beta+u^2}\right)}{\sqrt{r^2\sin^2\beta+u^2}}\right]\right\}du.$$

Pour une matrice lisse ne présentant pas d'angles à la frontière du contact, $C=0$.

9.8. Etudier l'état de contrainte d'une barre de section constante ($\delta=1$) qui s'appuie sur un support parfaitement solide et lisse

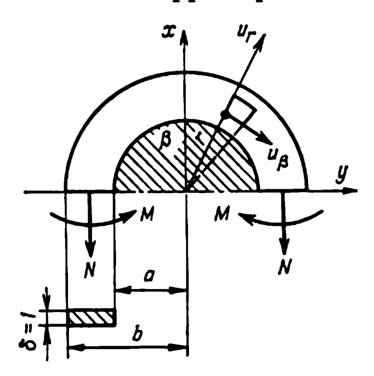


Fig. 87

et qui est symétriquement sollicitée par un moment fléchissant M et par des forces normales N (fig. 87).

Les contraintes au sein de la barre s'expriment par les formules:

$$\left.\begin{aligned}R_r&=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2}, \qquad B_\beta=\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2},\\ R_\beta&=B_r=-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\frac{\varphi}{r}\right),\end{aligned}\right\}\qquad\text{(a)}$$

où φ est une fonction biharmonique.

Les conditions aux limites du problème sont:

$$\left.\begin{aligned}&\text{pour } r=a \qquad u_r=B_r=0;\\ &\text{pour } r=b \qquad R_r=B_r=0,\end{aligned}\right\}\qquad\text{(b)}$$

pour $\beta = \pm\pi/2$

$$\int_a^b B_\beta\, dr = N, \quad \int_a^b B_\beta r\, dr = M, \quad R_\beta = 0. \tag{c}$$

En définissant la fonction φ sous la forme d'une des intégrales particulières connues de la fonction biharmonique (6.13):

$$\varphi = (Ar^{\lambda} + Br^{\lambda+2} + Cr^{-\lambda} + Dr^{-\lambda+2}) \cos \lambda\beta, \tag{d}$$

où λ est un paramètre indéterminé.

Selon les formules (a)

$$\left.\begin{aligned} R_r &= [\lambda(1-\lambda) Ar^{\lambda-2} - (\lambda+1)(\lambda-2) Br^{\lambda} - \\ &\quad - \lambda(\lambda+1) Cr^{-\lambda-2} + (1-\lambda)(\lambda+2) Dr^{-\lambda}] \cos \lambda\beta, \\ B_\beta &= [\lambda(\lambda-1) Ar^{\lambda-2} + (\lambda+1)(\lambda+2) Br^{\lambda} + \\ &\quad + \lambda(\lambda+1) Cr^{-\lambda-2} + (\lambda-1)(\lambda-2) Dr^{-\lambda}] \cos \lambda\beta; \\ R_\beta &= B_r = \lambda[(\lambda-1) Ar^{\lambda-2} + (\lambda+1) Br^{\lambda} - \\ &\quad - (\lambda+1) Cr^{-\lambda-2} + (1-\lambda) Dr^{-\lambda}] \sin \lambda\beta. \end{aligned}\right\} \tag{e}$$

Les déplacements se déterminent à partir des équations:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{1}{E}(R_r - \sigma B_\beta); \\ &\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + \frac{u_r}{r} = \frac{1}{E}(B_\beta - \sigma R_r); \\ &\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_r}{\partial \beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial r} - \frac{u_\beta}{r} = \frac{2(1+\sigma)}{E} R_\beta. \end{aligned}\right\} \tag{f}$$

En intégrant les équations (f) et en égalant à zéro les fonctions arbitraires, on obtient:

$$\begin{aligned} Eu_r &= \{-(1+\sigma)\lambda Ar^{\lambda-1} - [\lambda - 2 + \sigma(\lambda+2)] Br^{\lambda+1} + \\ &\quad + (1+\sigma)\lambda Cr^{-\lambda-1} + [\lambda + 2 + \sigma(\lambda-2)] Dr^{-\lambda+1}\} \cos \lambda\beta; \\ Eu_\beta &= \{(1+\sigma)\lambda Ar^{\lambda-1} + [(1+\sigma)\lambda + 4] Br^{\lambda+1} + \\ &\quad + (1+\sigma)\lambda Cr^{-\lambda-1} + [(1+\sigma)\lambda - 4] Dr^{-\lambda+1}\} \sin \lambda\beta. \end{aligned} \tag{g}$$

En établissant les conditions (b) et en égalant à zéro le déterminant $\Delta(\lambda)$ de ces équations, on obtient l'équation transcendante pour la détermination de λ

$$\left.\begin{aligned} \Delta(\lambda) \equiv \lambda(\lambda^2-1) b^{-3} [-2\lambda(3-\sigma)(\lambda+1)\alpha + \\ + 6(1-\sigma)(\lambda^2-1)\alpha^{-1} + (1+\sigma)(\lambda^3+5\lambda-2)\alpha^{-3} + \\ + 2(\lambda^2+4\lambda+2-2\sigma)\alpha^{-2\lambda-1} - \\ - 2(\lambda+1)(2\lambda-1+\sigma)\alpha^{2\lambda-1}] = 0, \end{aligned}\right\} \tag{h}$$

où $\alpha = a/b$.

Quand $\lambda = 0$, on obtient la solution de Lamé, quand $\lambda = \pm 1$, on a les intégrales particulières de l'équation biharmonique différant de la solution (d). Les racines restantes de l'équation (h) fournissent une multitude de paramètres λ_m.

Pour chaque paramètre λ_m, on détermine les constantes correspondantes suivant les formules:

$$\begin{aligned} A_m &= \Delta_1 (\lambda_m) F_m, & B_m &= \Delta_2 (\lambda_m) F_m, \\ C_m &= \Delta_3 (\lambda_m) F_m; & D_m &= \Delta_4 (\lambda_m) F_m, \end{aligned} \qquad \text{(i)}$$

où $\Delta_i (\lambda_m)$ sont des compléments algébriques des éléments d'une ligne ou d'une colonne quelconque du déterminant $\Delta (\lambda_m)$; F_m un facteur arbitraire de proportionnalité.

En sommant en m les solutions, on obtient l'expression générale de la fonction des contraintes pour l'état de contrainte symétrique par rapport à la coordonnée β:

$$\varphi = \sum_m [\Delta_1 (\lambda_m) r^{\lambda_m} + \Delta_2 (\lambda_m) r^{\lambda_m+2} + \Delta_3 (\lambda_m) r^{-\lambda_m} + \\ + \Delta_4 (\lambda_m) r^{-\lambda_m+2}] F_m \cos \lambda_m \beta. \qquad \text{(j)}$$

En reportant la ligne (j) dans les formules (e) et (g), on trouve les valeurs des contraintes et des déplacements.

En laissant le nombre de termes nécessaire dans la ligne (j), on est en mesure de satisfaire aux deux conditions intégrales (c),

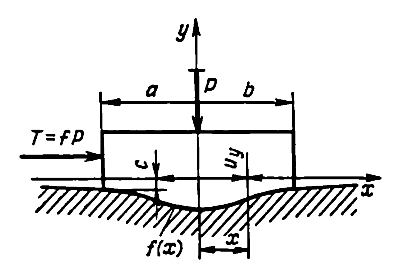


Fig. 88

tandis que pour la condition locale (c) il sera exigé que R_β soit nul pour le nombre limite de points $r = r_i$; aux points $r = {a \atop b}$ cette condition est déjà remplie [équation (b)].

▶Résoudre le problème (9.8) en l'absence des déplacements u_r et u_β le long de la ligne de contact $r = a$.

9.9. Problème de L. Galine (1943).

Déterminer la pression exercée par l'enfoncement de la matrice dans un demi-plan $y \leqslant 0$ en tenant compte des frottements réciproques. Le problème doit être résolu en admettant que la matrice se trouve en état d'équilibre limite de cisaillement *) quand l'effort horizontal de cisaillement $T = fP$, où f est le coefficient de frottement, tandis que P est la force pressant la matrice (fig. 88).

*) La force T n'engendre pas de moment (la matrice ne pivote pas).

En définissant $f(x)$ comme l'équation du contour de la matrice, on obtient les conditions aux limites sous la forme

$$\left.\begin{array}{l} Y_{y=0} = X_{y=0} \text{ surface libre;} \\ X_{y=0} + fY_{y=0} = 0 \text{ et } u_{y=0} = f(x) + c \text{ surface sous} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{la matrice.} \end{array}\right\} \quad (a)$$

En intégrant les équations des déformations pour le demi-plan :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\pi E_1}{2} u_x + C_1 = \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \pi \int_a^x Y_{y=0}\, dx + \int_a^b X_{y=0} \operatorname{Log}(\xi - x)\, d\xi; \\ \frac{\pi E_1}{2} u_y + C_2 = \int_a^b Y_{y=0} \operatorname{Log}(\xi - x)\, d\xi - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \pi \int_a^x X_{y=0}\, dx, \end{array}\right| \quad (b)$$

où $E_1 = E/(1-\sigma^2)$; C_i des constantes.

L'équation (b) fournie s'écrit sous la forme

$$\frac{\pi E_1}{2} u_y + C_2 = \int_a^b Y_{y=0} \operatorname{Log} |\xi - x|\, d\xi - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \pi \int_0^x X_{y=0}\, dt.$$

La dérivée par rapport au déplacement est

$$\frac{\pi E_1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)_{y=0} = \int_a^b Y_{y=0} \frac{d\xi}{\xi - x} - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \pi X_{y=0}. \quad (c)$$

Sur la base de la condition (a) l'expression (c) devient

$$\frac{\pi E_1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)_{y=0} = \int_a^b Y_{y=0} \frac{d\xi}{\xi - x} + \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \pi f Y_{y=0}. \quad (d)$$

Introduisons la fonction de variable complexe $z = x + iy$

$$w_1(z) = \bar{u}_x - i\bar{u}_y = \int_a^b Y_{y=0} \frac{dx}{x - z}. \quad (e)$$

Le second membre des formules (d) s'exprime au moyen des parties réelle et imaginaire de la fonction (e) avec $y = 0$

$$\frac{\pi E_1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)_{y=0} = \bar{u}_x + f \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \bar{u}_y.$$

En adoptant la condition (a), il vient

$$\frac{\pi E_1}{2} f'(x) = \bar{u}_x + f \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \bar{u}_y.$$

Sur la surface libre $Y_{y=0} = 0$ la partie imaginaire de la fonction avec $y = 0$ s'annulle également.

Les conditions aux limites dans la zone extérieure à la matrice sont pour $y = 0$ et $-\infty < x < a,\ b < x < \infty$

$$\bar{u}_y = 0;$$

à l'endroit de contact de la matrice avec le demi-plan élastique pour $y = 0$ et $a < x < b$

$$\bar{u}_x + f\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}\bar{u}_y = \frac{\pi E_1}{2} f'(x). \tag{f}$$

En outre la fonction $w_1(z)$:

1) par suite de l'absence sous la matrice d'efforts concentrés, peut posséder sur l'axe réel des singularités de l'espèce $z^{-\alpha}$, où $0 < \alpha < 1$;

2) à l'infini elle doit se conduire comme Pz^{-1}, où P est la force comprimant la matrice.

La constante disparaissant avec la dérivation de l'expression (c) doit entrer dans l'expression de la fonction (f); elle se détermine à partir des données complémentaires.

Ainsi donc le problème s'est ramené au cas particulier du problème limite de type mixte consistant à rechercher la fonction de variable complexe (problème de Riemann-Gilbert).

Il s'agit de trouver la fonction qui satisfait sur l'axe x à la condition

$$a(x)\,u_x + b(x)\,u_y = F(x),$$

où

$$a(x) = 0,\ b(x) = 1 \text{ pour } -\infty < x < a,\ b < x < \infty;$$

$$a(x) = 1,\quad b(x) = f\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \quad \text{pour } a < x < b;$$

$$F(x) = \frac{\pi E_1}{2} f'(x).$$

Les solutions du problème homogène prennent la forme

$$w_1(z) = \exp\left[\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(f\frac{1-2\sigma}{2-2\sigma}\right)\int_a^b \frac{dx}{x-z}\right]\frac{iP(z)}{(z-a)(z-b)},$$

où $P(z)$ est un certain polynôme.

En prenant divers polynômes $P(z)$, on obtient des solutions différentes du problème homogène :

$$\left.\begin{aligned} w_1^0 &= \left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\theta};\\ w_1^0 &= \left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{1-\theta};\\ w_1^0 &= \left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\theta}\frac{1}{z-b} = \frac{1}{(z-a)^{\theta}(z-b)^{1-\theta}}, \end{aligned}\right\} \tag{g}$$

où

$$\theta = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2(1-\sigma)}{f(1-2\sigma)};$$

en outre $|\theta| < 1$.

Pour le premier polynôme (g), il vient

$$w_1(z) = \frac{E_1}{2\sqrt{1+f^2\left(\frac{1-2\sigma}{2-2\sigma}\right)^2}} \left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{1-\theta} \times$$
$$\times \int_a^b f'(x) \left(\frac{b-x}{x-a}\right)^{-\theta} - \frac{dx}{x-z}. \tag{h}$$

Pour que la solution (h) devienne générale, il lui faut ajouter la fonction satisfaisant aux conditions homogènes

$$C/[(z-a)^{\theta}(z-b)^{1-\theta}]. \tag{i}$$

La pression s'exerçant sur la matrice

$$p(x) = -\operatorname{Im}[w_1(z)]_{z=x-i\cdot 0}.$$

En l'absence de frottement entre la matrice et le corps élastique on a:

$$f=0 \text{ et } \theta = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2(1-\sigma)}{f(1-2\sigma)} = \frac{1}{2}.$$

En reportant dans l'expression (h), compte tenu de (i), les valeurs $f = 0$ et $\theta = \frac{1}{2}$, et en posant $z \to x$, puis en séparant la partie imaginaire, il vient

$$p(x) = -Y_{y=0} = -\frac{E_1}{2} \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \int_a^b f'(x) \sqrt{(\xi-a)(b-\xi)} \times$$
$$\times \frac{d\xi}{\xi-x} - \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$$

▶ Déterminer la pression, compte tenu des frottements, dans le cas de l'enfoncement avec un effort P dans un demi-plan d'une matrice à base plate $[f(x) = \text{const}]$ (voir monographie [43], ch. I, § 8).

Réponse: $w_1(z) = -\frac{P}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\frac{1}{2}-\theta}$. Pour $f=0$ et $\theta = \frac{1}{2}$ $w_1(z) = -\frac{P}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}$. A la surface du demi-plan la pression normale est:

$$p(x) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im}[w_1(z)]_{z=x-i\cdot 0} = \frac{1}{\pi} \frac{P}{\sqrt{(a+x)(b-x)}}.$$

Comparer avec les résultats du problème 9.5.

9.10. Déterminer les états de contrainte et de déformation d'un demi-plan élastique $y \leqslant 0$ si sur le segment AB

$$u_x = g_1 + C_1, \; u_y = g_2 + C_2 \tag{a}$$

sur l'axe Ox en dehors du segment AB

$$Y_y = N = 0, \; X_y = T = 0 \tag{b}$$

est connu le vecteur principal des efforts (X, Y) agissant sur le segment AB (fig. 89).

Par condition

$$\int_{AB} T\,dx = X, \quad \int_{AB} N\,dx = -Y. \tag{c}$$

Si N et T étaient connus sur le segment AB, le problème serait résolu.

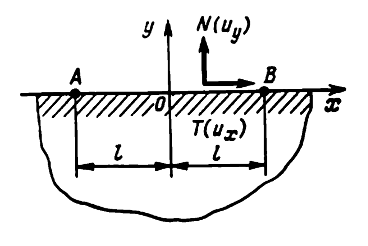


Fig. 89

En appliquant la méthode de la variable complexe $(z = x + iy)$, on trouve les expressions des fonctions auxiliaires [21]:

$$\left.\begin{aligned} \psi(z) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{AB}(N+iT)\operatorname{Log}(t-z)\,dt + C_3, \\ \chi'(z) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{AB}(N-iT)\operatorname{Log}(t-z)\,dt - z\psi'(z) + C_4. \end{aligned}\right\} \tag{d}$$

En portant les expressions (d) dans la formule des déplacements (5.20)

$$2G(u_x + iu_y) = \varkappa\psi(z) - \overline{z\psi'(z)} - \overline{\chi'(z)},$$

où pour une déformation plane

$$\varkappa = \frac{\lambda + 3G}{\lambda + G} = 3 - 4\sigma,$$

ensuite en passant à la limite $z \to \tau$, où τ est le point du segment AB, on obtient, compte tenu des formules (a), les équations intégrales permettant de déterminer N et T:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-l}^{l} T(t) \operatorname{Log} |t-\tau| \, dt + \alpha\pi \int_{0}^{\tau} N(t) \, dt = \\ &\qquad = -\frac{4G\pi}{\varkappa+1} g_1(\tau) + C_1 = f_1(\tau) + C_1, \\ &\int_{-l}^{l} N(t) \operatorname{Log} |t-\tau| \, dt - \alpha\pi \int_{0}^{\tau} T(t) \, dt = \\ &\qquad = \frac{4G\pi}{\varkappa+1} g_2(\tau) + C_2 = f_2(\tau) + C_2, \end{aligned}\right\} \tag{e}$$

où

$$\alpha = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} < 1.$$

Introduisons dans l'étude les fonctions $U_1 + iV_1$ et $U_2 + iV_2$ de la variable complexe z:

$$U_1 + iV_1 = \int_{-l}^{l} T(t) \operatorname{Log}(t-z) \, dt; \quad U_2 + iV_2 = \int_{-l}^{l} N(t) \operatorname{Log}(t-z) \, dt. \tag{f}$$

Les formules (*f*) montrent que U_1 et U_2 sont des potentiels logarithmiques des couches élémentaires réparties sur AB avec des densités T et N.

En vertu de la symétrie les fonctions $U_1(x, y)$ et $U_2(x, y)$ sont paires par rapport à y. En conséquence suivant la formule connue de la théorie du potentiel, il vient

$$T = \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial y} \right)_+ - \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} \right)_- \right] = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} \right)_+ \tag{g}$$

et de façon analogue s'obtient la formule pour N.

On a noté par les signes «+» et «—» les valeurs de la dérivée obtenue à l'approche des points du segment AB par le haut ($y > 0$) ou par le bas ($y < 0$).

De la formule (g) en utilisant les relations de Cauchy-Riemann, on déduit:

$$\int_{0}^{\tau} T(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\tau} \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} \right)_+ dx = -\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\tau} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} \right)_+ dx =$$
$$= -\frac{1}{\pi} V_1(x, 0) + C, \tag{h}$$

et, de façon analogue, on déduit N.

D'après les formules (h) la solution des équations (e) se ramène à la recherche de deux fonctions réelles U_1 et U_2 continues sur tout le plan, harmoniques en dehors du segment AB et qui se conduisent à l'infini de façon identique [selon les expressions (f) et (c)] à $X \operatorname{Log} |z|$ et à $Y \operatorname{Log} |z|$ et vérifient sur le bord supérieur du segment AB les conditions

$$U_1 - \alpha V_2 = f_1 + C_1, \quad U_2 + \alpha V_1 = f_2 + C_2, \tag{i}$$

où V_1 et V_2 sont des fonctions conjuguées respectivement de U_1 et U_2.

Pour résoudre le problème appliquons le plan z, coupé suivant AB, sur l'image du cercle $|\zeta| = 1$ du plan $\zeta = \xi + i\eta$ au moyen de la relation connue

$$z = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right).$$

En vertu des propriétés mentionnées des fonctions cherchées pour $|\zeta| > 1$

$$U_1 + iV_1 = X \operatorname{Log} \zeta + \sum_1^\infty a_n \zeta^{-n} + C_1;$$

$$U_2 + iV_2 = Y \operatorname{Log} \zeta + \sum_1^\infty b_n \zeta^{-n} + C_2, \tag{j}$$

où a_n et b_n sont les coefficients réels cherchés.

En posant $\zeta = re^{i\beta}$ $(r \geqslant 1)$ et considérant que les fonctions U_1, U_2 et les parties monodromes des fonctions V_1, V_2 sont continues jusqu'au contour du cercle, les développements antérieures se justifiant également pour $r = 1$ (il s'ensuit de cela que les séries $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$ convergent), on obtient, en vertu des formules (i), quand $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$:

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^\infty a_n \cos n\beta + \alpha \sum_1^\infty b_n \sin n\beta = F_1 + C_1; \\ \sum_1^\infty b_n \cos n\beta - \alpha \sum_1^\infty a_n \sin n\beta = F_2 + C_2, \end{aligned}\right| \tag{k}$$

où

$$F_1 = f_1 + \alpha Y\beta; \quad F_2 = f_2 - \alpha X\beta.$$

En multipliant les deux membres des équations (k) par $\frac{2}{\pi} \cos m\beta$ $(m = 1, 2, \ldots)$ et en intégrant de 0 à π, on aboutit à un système infini d'équations linéaires avec un nombre infini de variables du type:

$$a_m + \alpha \sum_{n=1}^\infty a_{mn} b_n = C'_m; \quad b_m - \alpha \sum_{n=1}^\infty a_{mn} a_n = C''_m,$$

où

$$a_{mn}=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos m\beta \sin n\beta \, d\beta = \left|\begin{array}{ll} \frac{4n}{\pi(n^2-m^2)} & \text{pour } (n-m) \text{ impair,} \\ 0 & \text{pour } (n-m) \text{ pair,} \end{array}\right.$$

C'_m et C''_m étant les coefficients de Fourier des fonctions F_1 et F_2 après développement dans l'intervalle $0 - \pi$ en série suivant les cosinus.

Si f_1 et f_2 possèdent, par exemple, des dérivées limitées par rapport à β dans l'intervalle $0 - \pi$, les séries dans les premiers membres de l'expression (k) et à plus forte raison, les séries dans l'expression (j) convergent absolument et uniformément. Après avoir trouvé $U_1 + iV_1$ et $U_2 + iV_2$, on détermine directement, à l'aide des formules (d) et (f), $\psi(z)$ et $\chi'(z)$.

CHAPITRE 10

PROBLÈME DYNAMIQUE

En admettant que le mouvement d'un corps (d'un milieu) élastique et isotrope se manifeste par des déformations infiniment petites, il est possible d'écrire l'équation du mouvement en recourant au principe de d'Alembert:

$$(\lambda+G)\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}, \frac{\partial\theta}{\partial y}, \frac{\partial\theta}{\partial z}\right)+G\nabla^2(u_x, u_y, u_z)=$$
$$=\rho\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial\tau^2}, \frac{\partial^2 u_y}{\partial\tau^2}, \frac{\partial^2 u_z}{\partial\tau^2}\right), \qquad (10.1)$$

ou en utilisant la forme vectorielle:

$$(\lambda+G)\,\text{grad}\,\theta+G\nabla^2 u=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}. \qquad (10.2)$$

Profitant de l'identité vectorielle

$$\text{rot rot} = \text{grad div} - \nabla^2,$$

de l'équation (10.2), il ressort

$$(\lambda+2G)\,\text{grad div}\, u - G\,\text{rot rot}\, u = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}. \qquad (10.2')$$

Avec les conditions adoptées du mouvement les formules des déformations et de la loi de Hooke restent inchangées.

I. MOUVEMENT HARMONIQUE SIMPLE

Dans une oscillation harmonique simple de période $T = 2\pi/p$, où p est la pulsation, le déplacement peut s'exprimer ainsi:

$$u_x = A\cos(p\tau+\varepsilon)\,u'_x;\quad u_y = A\cos(p\tau+\varepsilon)\,u'_y;$$
$$u_z = A\cos(p\tau+\varepsilon)\,u'_z$$

et d'obtenir l'équation (10.1) sous la forme

$$(\lambda+G)\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}, \frac{\partial\theta}{\partial y}, \frac{\partial\theta}{\partial z}\right)+(G\nabla^2+\rho p^2)(u_x, u_y, u_z)\,^{*})=0. \qquad (10.3)$$

En dérivant ces équations respectivement par rapport à x, y, z et en additionnant les résultats, il vient

$$(\nabla^2+h^2)\,\theta=0, \qquad (10.4)$$

où

$$h^2=\rho p^2/(\lambda+2G). \qquad (10.5)$$

En posant

$$\varkappa^2=\rho p^2/G, \qquad (10.6)$$

on obtient l'équation (10.3) sous la forme:

$$(\nabla^2+\varkappa^2)(u_x, u_y, u_z)=\left(1-\frac{\varkappa^2}{h^2}\right)\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}, \frac{\partial\theta}{\partial y}, \frac{\partial\theta}{\partial z}\right). \qquad (10.7)$$

Si θ vérifie l'équation (10.4), c'est-à-dire si $\nabla^2\theta=-h^2\theta$ la solution des équations (10.7) sera

$$u_x, u_y, u_z=u_x^{(1)}+u_x^{(2)},\ u_y^{(1)}+u_y^{(2)},\ u_z^{(1)}+u_z^{(2)}, \qquad (10.8)$$

où $u_x^{(1)}, u_y^{(1)}, u_z^{(1)}$ est la solution générale des équations (10.7) démunies de leur second membre à la condition que

$$\theta^{(1)}=\operatorname{div} u=\frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial u_y^{(1)}}{\partial y}+\frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z}=0, \qquad (10.9)$$

vu que cette dernière ressort de l'équation (10.4)

$$u_x^{(2)}, u_y^{(2)}, u_z^{(2)}=-\frac{1}{h^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}, \frac{\partial\theta}{\partial y}, \frac{\partial\theta}{\partial z}\right) \qquad (10.10)$$

qui est la solution particulière des équations (10.7) munies du second membre.

Les équations (10.4) et (10.7) démunies de leur second membre sont appelées équations d'oscillations ou équations d'ondes stationnaires.

Leurs solutions particulières sont dans les cas:
d e c o o r d o n n é e s r e c t a n g u l a i r e s

$$u_{lm}^{(1)}=e^{i(kx+ly+mz)} \qquad (10.11)$$

(onde plane),
où $k^2+l^2+m^2=\varkappa^2$;
d e c o o r d o n n é e s c y l i n d r i q u e s

$$u_{km}^{(1)}=e^{\pm i(mz+k\beta)}R_k\left(r\sqrt{\varkappa^2-m^2}\right)^{**}) \qquad (10.12)$$

(onde cylindrique);

---

*) Dans les équations (10.3), pour simplifier l'écriture, les primes près des déplacements sont omises.

**) $R_k(pr)=E_kJ_k(pr)+F_kN_k(pr)$ est une fonction cylindrique d'ordre k (voir ch. 4, § 3).

pour $k = m = 0$, $u_{00}^{(1)} = (a_1\beta + a_2)(b_1 z + b_2) R_0(\varkappa r)$;
de coordonnées sphériques

$$u_n^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{r}} R_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa r)\, Y_n(\alpha, \beta)\,^{*)} \qquad (10.13)$$

(onde sphérique);
pour $n = 0$, $u_0^{(1)} = e^{i\varkappa r}/r$.

Pour des oscillations dans un plan ($m = 0$) l'onde plane se transforme en une onde rectiligne, tandis que l'onde cylindrique devient circulaire.

II. PROPAGATION DES ONDES VOLUMÉTRIQUES DANS UN MILIEU ISOTROPE ÉLASTIQUE

Pour $\theta = 0$, les équations (10.1) deviennent:

$$G\nabla^2(u_x, u_y, u_z) = \rho \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}(u_x, u_y, u_z). \qquad (10.14)$$

Si ω_x, ω_y, ω_z [équations (2.3a)] sont nuls, de sorte que le vecteur $\boldsymbol{u}$ devient le gradient d'un certain potentiel φ, c'est-à-dire

$$\boldsymbol{u} = \operatorname{grad} \varphi = \boldsymbol{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

ou

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

alors

$$\theta = \nabla^2 \varphi,$$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial z}\right) = \nabla^2(u_x, u_y, u_z),$$

et les équations (10.1) prendront la forme:

$$(\lambda + 2G)\nabla^2(u_x, u_y, u_z) = \rho \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}(u_x, u_y, u_z). \qquad (10.15)$$

Les équations (10.14) et (10.15) sont des équations des ondes dans l'espace

$$c_i^2 \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2}, \qquad (10.16)$$

où c_i est la vitesse de propagation des ondes, $\varphi = u_x, u_y, u_z$.

Les ondes de cisaillement, de distorsion (ondes S) n'entraînant pas de dilatation cubique ($\theta = 0$), possèdent la vitesse $c_2 = \sqrt{G/\rho}$; les ondes non rotationnelles ($\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$), les ondes de

---

*) $Y_n(\alpha, \beta) = \sum_m C_{mn} P_{nm}(\cos \alpha)\, e^{im\beta}$ est une fonction sphérique de degré n (voir ch. 4, § 4).

compression-extension (ondes P), avec lesquelles le volume varie, se propagent avec la vitesse $c_1 = \sqrt{\lambda + 2G/\rho}$.

Si $\varphi = \varphi(x, y, \tau)$, l'équation (10.16) prend la forme d'une équation d'onde sur le plan

$$c_1^2 = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2}\,{}^{*)}. \tag{10.17}$$

Pour $\varphi = \varphi(x, \tau)$ de même que pour $\varphi = \varphi(y, \tau)$, on obtient une équation d'onde à une seule dimension:

$$c^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2}. \tag{10.18}$$

La solution générale de l'équation (10.18), obtenue par d'Alembert, a la forme:

$$\varphi = f_1(x - c\tau) + f_2(x + c\tau), \tag{10.19}$$

où f_i sont des fonctions quelconques.

Le processus que traduit l'équation (10.19) est constitué de deux ondes se propageant à la vitesse c.

Si $\varphi = \varphi(r, \tau)$, où r est le rayon-vecteur du point, l'équation (10.18) prend la forme:

$$\frac{c^2}{r}\cdot\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2}. \tag{10.20}$$

La solution générale de l'équation (10.20) est

$$\varphi = f_1(r - c\tau)/r + f_2(r + c\tau)/r, \tag{10.21}$$

où f_i sont des fonctions quelconques.

Le processus que traduit l'équation (10.21) est constitué de deux ondes circulaires dont la source est un point fixe et qui se propagent à la vitesse c.

La surface s de la partie perturbée du milieu se déplace en direction de sa normale ν à la vitesse c.

Les conditions cinématiques (neuf équations) des points de la surface s ([4], § 205) prennent la forme:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u_x}{\partial\nu} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}\Big/ l = \frac{\partial u_x}{\partial y}\Big/ m = \frac{\partial u_x}{\partial z}\Big/ n = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial u_x}{\partial\tau};\\
\frac{\partial u_y}{\partial\nu} &= \frac{\partial u_y}{\partial x}\Big/ l = \frac{\partial u_y}{\partial y}\Big/ m = \frac{\partial u_y}{\partial z}\Big/ n = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial u_y}{\partial\tau},\\
\frac{\partial u_z}{\partial\nu} &= \frac{\partial u_z}{\partial x}\Big/ l = \frac{\partial u_z}{\partial y}\Big/ m = \frac{\partial u_z}{\partial z}\Big/ n = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial u_z}{\partial\tau},
\end{aligned}\right\} \tag{10.22}$$

où $l = \cos(x, \nu)$, $m = \cos(y, \nu)$, $n = \cos(z, \nu)$ sont les cosinus directeurs de la surface s.

---

*) Pour $u_x = \frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \frac{\partial\psi_2}{\partial y}$, $u_y = \frac{\partial\psi_1}{\partial y} - \frac{\partial\psi_2}{\partial x}$, on obtient $c_1^2\nabla^2\psi_1 = \frac{\partial^2\psi_1}{\partial\tau^2}$ et $c_2^2\nabla^2\psi_2 = \frac{\partial^2\psi_2}{\partial\tau^2}$.

Les conditions dynamiques (trois équations) des points de la surface s sont :

$$\rho c \left(\frac{\partial u_x}{\partial \tau}, \frac{\partial u_y}{\partial \tau}, \frac{\partial u_z}{\partial \tau}\right) = -(X_\nu, Y_\nu, Z_\nu), \qquad (10.23)$$

où X_ν, Y_ν, Z_ν sont les projections sur les axes x, y, z des contraintes sur la surface s.

Les seconds membres des équations (10.23) peuvent être écrits sous la forme :

$$-\left[(\lambda + G)\, l \frac{\partial u_x}{\partial x} + G\left(l \frac{\partial u_x}{\partial x} + m \frac{\partial u_x}{\partial y} + n \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\lambda l \frac{\partial u_y}{\partial y} + Gm \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) + \left(\lambda l \frac{\partial u_z}{\partial z} + Gn \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\right], \qquad (10.24)$$

. . . .

. . . .

Les deux expressions suivantes de (10.24) s'obtiennent par permutation circulaire des lettres x, y, z, l, m, n.

III. PROPAGATION DES ONDES LE LONG DE LA SURFACE D'UN CORPS ÉLASTIQUE ISOTROPE

1. Ondes de Rayleigh [44]

Les ondes planes de nature harmonique simple se propageant suivant le plan limite $z = 0$ d'un milieu $z \geqslant 0$ pour lesquelles la perturbation ne pénètre qu'à une faible profondeur dans le milieu sont appelées ondes de Rayleigh (ondes R). Les déplacements dans la propagation de l'onde en direction de l'axe x prennent la forme :

$$u_x, u_y, u_z = u_x^{(1)} + u_x^{(2)}, \quad u_y^{(1)} + u_y^{(2)}, \quad u_z^{(1)} + u_z^{(2)}, \qquad (10.25)$$

où

$$\left.\begin{aligned} u_x^{(1)}, \; u_y^{(1)}, \; u_z^{(1)} &= (is, \; k, \; f)\, \varkappa^{-2}\, Qe^{-sz + i(p\tau - fx)}, \\ u_x^{(2)}, \; u_y^{(2)}, \; u_z^{(2)} &= (if, \; 0, \; d)\, h^{-2}\, Pe^{-dz + i(p\tau - fx)}, \end{aligned}\right\} \qquad (10.26)$$

et en conformité avec les équations (10.4), (10.5) et (10.7)

$$d^2 = f^2 - h^2, \; s^2 = f^2 - \varkappa^2. \qquad (10.27)$$

Sur le plan limite $z = 0$ doivent être satisfaites les conditions suivantes :

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0, \quad \lambda\theta + 2G \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0, \qquad (10.28)$$

ou en forme développée

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{2dfP}{h^2}+(s^2+f^2)\dfrac{Q}{\varkappa^2}=0, \quad k=0;\\ (\varkappa^2-2h^2)\,P/h^2-2d^2P/h^2-2sfQ/\varkappa^2=0,\end{array}\right\} \qquad (10.29)$$

où λ/G est remplacé par $\varkappa^2/h^2-2$.

La condition $k=0$ montre que le mouvement s'effectue dans le plan xz ($u_y=0$).

L'élimination de P et de Q des équations (10.29) aboutit à l'équation

$$\bar{\varkappa}^8-8\bar{\varkappa}^6+24\bar{\varkappa}^4-16\,(1+\bar{h}^2)\,\bar{\varkappa}^2+16\bar{h}^2=0; \qquad (10.30)$$

où $\bar{\varkappa}^2=\bar{\varkappa}^2/f^2$ et $\bar{h}^2=h^2/f^2$.

Pour un matériau incompressible ($\lambda=\infty$) $\bar{h}^2/\bar{\varkappa}^2=0$ et de l'équation (10.30), on tire

$$\bar{\varkappa}^6-8\bar{\varkappa}^4+24\bar{\varkappa}^2-16=0.$$

Quand la valeur de la racine est réelle $\varkappa^2=0{,}91262\ldots$

$$d^2=f^2,\ s^2=0{,}08737\ldots f^2,$$

la vitesse de propagation des ondes (longueur d'onde $2\pi/f$) se déterminant d'après la formule

$$c_R=p/f=0{,}955\ ^{*)}\ \ldots\sqrt{G/\rho}, \qquad (10.31)$$

c'est-à-dire qu'elle est proche de la vitesse des ondes de cisaillement.

Les ondes de surface de Rayleigh (R) se forment à la surface du demi-espace par superposition des ondes longitudinale (P) et transversale (S) à l'instant de la réflexion sur la limite du demi-espace $z\geqslant 0$.

Si le centre de la perturbation se trouve à l'origine des coordonnées le déplacement des points du demi-espace, coïncidant en direction avec leurs rayons-vecteurs, engendre les ondes longitudinales P, tandis que les déplacements suivant la normale aux rayons vecteurs produisent les ondes transversales S.

Au loin de la source de perturbation, le front d'ondes de Rayleigh possède un grand rayon, aussi peuvent-elles être considérées comme planes. Elles s'amortissent en profondeur suivant l'exponentielle (10.26), tandis que près de la surface ($z=0$), elles dominent. D'après les données de Miller et Pursey [45] l'énergie véhiculée par les différentes ondes se repartit de la façon suivante : les ondes de Rayleigh (R) — 67 %, les ondes transversales (S) — 26 %, les ondes longitudinales (P) — 7 %, aussi dans le calcul des fondations supportant des machines ou des édifices faut-il attacher une attention particulière à l'étude des ondes de surface de Rayleigh.

---

*) Le coefficient devant la racine varie dans les limites $0{,}874 \div 0{,}956$, quand σ varie de 0 à 0,5 respectivement (avec $\sigma=0{,}25$, ce dernier est égal à 0,92).

La figure 90 montre à l'échelle les positions de fronts des diverses ondes (R, S et P) ainsi que les déplacement des particules du milieu du fait de l'action de chacune des ondes pour un instant fixé du

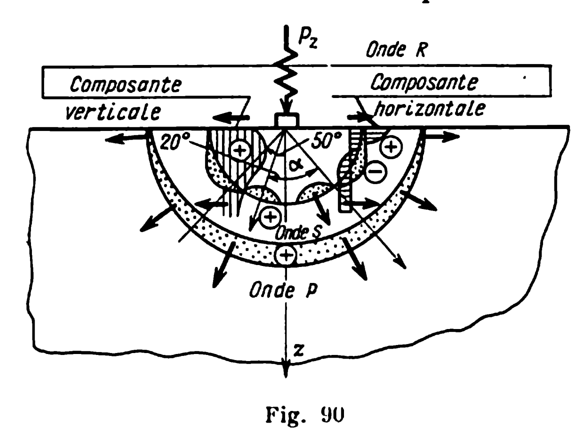


Fig. 90

temps. Les flèches indiquent les directions des déplacements des particules sur le front des ondes correspondantes (voir [46]).

Les applications de la théorie exposée de propagation des ondes au sein d'un demi-espace élastique au calcul des fondations sont décrites dans la monographie [47], et les expériences s'y rapportant dans l'article [48].

2. Ondes de Love [49]

Si le corps est constitué de deux domaines physiquement différents: $z \geqslant 0$ et $-h \leqslant z \leqslant 0$, il apparaît un autre type d'ondes appelés ondes de Love. Les déplacements ont dans ce cas l'aspect:

$$\left.\begin{aligned} &u_x, u_y, u_z = (0, v, 0)\, e^{iq(x-c\tau)} \text{ (pour } -h \leqslant z \leqslant 0) \\ &\text{et} \\ &u_x, u_y, u_z = (0, v', 0)\, e^{iq(x-c\tau)} \text{ (pour } z \geqslant 0), \end{aligned}\right\} \qquad (10.32)$$

où v et v' sont des fonctions de z *).

En assurant la continuité de v et de $Y_z = Z_y$ au cours de la traversée du plan $z = 0$ et en posant $Y_z = 0$ avec $z = -h$, il vient

$$v = v_0 \cos [\sigma q (z + h)] \text{ (avec } -h \leqslant z \leqslant 0),$$
$$v' = v_0 \cos (\sigma q h)\, e^{-\sigma' q z} \text{ (avec } z \geqslant 0),$$

*) Ici et plus loin les lettres sans primes correspondent à la couche supérieure et avec primes à la couche inférieure.

où v_0 est une grandeur arbitraire,

$$\sigma^2 = c^2/c_2^2 - 1, \quad (\sigma')^2 = 1 - c^2/(c_2^1)^2,$$
$$c_2^2 = G/\rho, \quad (c_2^1)^2 = G'/\rho',$$

la vitesse de propagation des ondes de Love c avec la condition $c_2^1 > c_2$ se déterminant à partir des équations

$$G'\left[1 - \frac{c^2}{(c_2^1)^2}\right]^{\frac{1}{2}} = G\left(\frac{c^2}{c_2^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg}\left[\left(\frac{c^2}{c_2^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} gh\right], \quad (10.33)$$

Il s'ensuit que la vitesse de propagation des ondes de Love est fonction de la longueur d'onde $2\pi/q$ et il se produit donc une dispersion des ondes.

IV. EXCITATION DES ONDES ÉLASTIQUES PAR DES FORCES DUES À LA MASSE [4]

Si le mouvement est déclenché sous l'action de forces de masse X, Y, Z dépendant des coordonnées x, y, z et du temps τ, les équations du mouvement (10.1) seront

$$(\lambda + G)\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}, \frac{\partial\theta}{\partial y}, \frac{\partial\theta}{\partial z}\right) + G\nabla^2(u_x\ u_y,\ u_z) +$$
$$+ \rho(X, Y, Z) = \rho\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial\tau^2}, \frac{\partial^2 u_y}{\partial\tau^2}, \frac{\partial^2 u_z}{\partial\tau^2}\right). \quad (10.34)$$

Représentons les forces dues à la masse sous la forme *):

$$X, Y, Z = \operatorname{grad}\Phi + \operatorname{rot}(L, M, N) = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) +$$
$$+ \left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right), \quad (10.35)$$

et les déplacements sous la forme:

$$u_x, u_y, u_z = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}(F, G, H), \quad (10.36)$$

ensuite, satisfaisons les équations (10.34), les fonctions F, G, H vérifiant les équations

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2} - c_1^2\nabla^2\varphi = \Phi; \quad &\frac{\partial^2 F}{\partial\tau^2} - c_2^2\nabla^2 F = L; \\ &\frac{\partial^2 G}{\partial\tau^2} - c_2^2\nabla^2 G = M; \quad &\frac{\partial^2 H}{\partial\tau^2} - c_2^2\nabla^2 H = N, \end{aligned}\right\} \quad (10.37)$$

où $c_1^2 = (\lambda + 2G)/\rho$ est le carré de la vitesse des ondes P non rotationnelles; $c_2^2 = G/\rho$ le carré de la vitesse des ondes de cisaillement (ondes S).

*) Solution de Kelvin (1848) dans le cas d'action statique des forces.

Les solutions particulières des équations (10.37) peuvent être présentées sous la forme:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi &= \frac{1}{4\pi c_1^2}\int\int\int \frac{1}{r}\Phi'(\tau - r/c_1)\,dx'\,dy'\,dz', \\
F &= \frac{1}{4\pi c_2^2}\int\int\int \frac{1}{r}L'(\tau - r/c_2)\,dx'\,dy'\,dz', \\
G &= \frac{1}{4\pi c_2^2}\int\int\int \frac{1}{r}M'(\tau - r/c_2)\,dx'\,dy'\,dz', \\
H &= \frac{1}{4\pi c_2^2}\int\int\int \frac{1}{r}N'(\tau - r/c_2)\,dx'\,dy'\,dz'.
\end{aligned}\right\} \quad (10.38)$$

En exprimant les grandeurs Φ', L', ... au moyen de X', Y', Z' suivant les formules:

$$\left.\begin{aligned}
\Phi' &= -\frac{1}{4\pi}\int\int_T\int\left(X'\frac{\partial r^{-1}}{\partial x} + Y'\frac{\partial r^{-1}}{\partial y} + Z'\frac{\partial r^{-1}}{\partial z}\right)dx'\,dy'\,dz'\,; \\
L' &= \frac{1}{4\pi}\int\int_T\int\left(Z'\frac{\partial r^{-1}}{\partial y} - Y'\frac{\partial r^{-1}}{\partial z}\right)dx'\,dy'\,dz'\,; \\
M' &= \frac{1}{4\pi}\int\int_T\int\left(X'\frac{\partial r^{-1}}{\partial z} - Z'\frac{\partial r^{-1}}{\partial x}\right)dx'\,dy'\,dz'\,; \\
N' &= \frac{1}{4\pi}\int\int_T\int\left(Y'\frac{\partial r^{-1}}{\partial x} - X'\frac{\partial r^{-1}}{\partial y}\right)dx'\,dy'\,dz',
\end{aligned}\right\} \quad (10.39)$$

où X', Y', Z' sont les valeurs de X, Y, Z au point (x', y', z') à l'intérieur du domaine T, quand les forces de masse sont différentes de zéro; r est la distance du point (x, y, z) du point (x', y', z'), on peut procéder à l'intégration des formules (10.38).

V. DÉFORMATION DES CORPS SOUS L'ACTION DES FORCES CENTRIFUGES

Les équations des écartements symétriques par rapport à l'axe z $\left(u_\beta = \frac{\partial u_r}{\partial \beta} - \frac{\partial u_z}{\partial \beta} = 0\right)$ selon les équations (3.3b) deviennent:

$$\left.\begin{aligned}
(\lambda + 2G)\frac{\partial \theta}{\partial r} + 2G\frac{\partial \omega_\beta}{\partial z} &= -p^2\rho r\,; \\
(\lambda + 2G)\frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{2G}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r\omega_\beta) &= 0,
\end{aligned}\right\} \quad (10.40)$$

ou, selon les équations (3.3b′),

$$(\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial r}+G\left(\nabla^2 u_r-\frac{u_r}{r^2}\right)=-p^2\rho r;\quad (\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial z}+G\nabla^2 u_z=0,$$

où

$$\theta=e_{rr}+e_{\beta\beta}+e_{zz}=\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}+\frac{\partial u_z}{\partial z};$$

$$2\omega_\beta=\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial z};\quad \omega_r=\omega_z=0;$$

p étant la vitesse angulaire de rotation.

Dans un système de coordonnées rectangulaires en vertu des équations (3.3a), on obtient:

$$\begin{aligned}&(\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial x}+G\nabla^2 u_x+p^2\rho x=0;\\&(\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial y}+G\nabla^2 u_y+p^2\rho y=0;\\&(\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial z}+G\nabla^2 u_z=0.\end{aligned}\tag{10.41}$$

VI. PROBLÈMES DYNAMIQUES PLANS

1. Équations du mouvement

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial\tau^2};\quad \frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial\tau^2},\tag{10.42}$$

2. Équations de la loi de Hooke

$$\left.\begin{aligned}X_x&=(\lambda+2G)\frac{\partial u_x}{\partial x}+\lambda\frac{\partial u_y}{\partial y};\\Y_y&=(\lambda+2G)\frac{\partial u_y}{\partial y}+\lambda\frac{\partial u_x}{\partial x};\\X_y&=Y_x=G\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right).\end{aligned}\right\}\tag{10.43}$$

3. Équation de continuité des déformations

$$\nabla^2(X_x+Y_y)-\frac{2(\lambda+G)}{\lambda+2G}\rho\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)=0,$$

ou

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c_1^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)(X_x+Y_y)=0.\tag{10.44}$$

4. Méthode de la variable complexe [50, 51]

En dérivant la première équation de (10.42) par rapport à x, la seconde par rapport à y et en soustrayant les résultats l'un de l'autre, il vient

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{2c_2^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right)X_x=\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{1}{2c_2^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right)Y_y. \qquad (10.45)$$

L'équation (10.45) est indentiquement satisfaite si les contraintes sont égales à

$$X_x=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-\frac{1}{2c_2^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial \tau^2}; \quad Y_y=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\frac{1}{2c_2^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial \tau^2}, \qquad (10.46)$$

où la fonction Φ, analogue dynamique de la fonction d'Airy, vérifie l'équation

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c_1^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right)\left(\nabla^2-\frac{1}{c_2^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right)\Phi(x, y, \tau)=0. \qquad (10.47)$$

Si les perturbations se déplacent à la vitesse c parallèlement à l'axe x, en introduisant la transformation,

$$\xi = x - c\tau, \ \eta = y,$$

on obtiendra l'équation (10.47) sous la forme:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}-\frac{1}{s_1^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}-\frac{1}{s_2^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)\Phi=0, \qquad (10.48)$$

où

$$s_1=i\beta_1=i\left(1-\frac{c^2}{c_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad s_2=i\beta_2=i\left(1-\frac{c^2}{c_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (10.49)$$

Les formules (10.46) prendront la forme:

$$X_x=\frac{\partial^2\Phi}{\partial \eta^2}-\frac{c^2}{c_1^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial \xi^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial \eta^2}-\frac{1}{2}\left(1-\beta_1^2)\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial \xi^2}, \qquad (10.50)$$

$$Y_y=\frac{1}{2}\left(1+\beta_2^2\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial \xi^2}$$

et

$$X_x+Y_y=\frac{\partial^2\Phi}{\partial \eta^2}+\beta_2^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial \xi^2}. \qquad (10.51)$$

En posant

$$z_1 = \xi + s_1\eta, \ z_2 = \xi + s_2\eta, \qquad (10.52)$$

on obtient la solution de l'équation (10.48):

$$\Phi = F_1(z_1) + \overline{F_1(z_1)} + F_2(z_2) + \overline{F_2(z_2)} = 2\mathrm{Re}\,[F_1(z_1) + F_2(z_2)], \qquad (10.53)$$

où $F_1(z_1)$, $\overline{F_1(z_1)}$ et $F_2(z_2)$, $\overline{F_2(z_2)}$ sont les fonctions analytiques conjuguées des variables complexes z_1 et z_2.

En reportant l'expression (10.53) dans les formules (10.50) et (10.51), on obtient

$$\left.\begin{aligned} X_x &= -2\mathrm{Re}\left[\left(\frac{1}{2}+\beta_1^2-\frac{1}{2}\beta_2^2\right)F_1''(z_1)+\right.\\ &\qquad\left.+\frac{1}{2}(1+\beta_2^2)F_2''(z_2)\right];\\ Y_y &= (1+\beta_2^2)\,\mathrm{Re}\,[F_1''(z_1)+F_2''(z_2)];\\ X_x+Y_y &= -2(\beta_1^2-\beta_2^2)\,\mathrm{Re}\,[F_1''(z_1)]. \end{aligned}\right\} \quad (10.54)$$

Après substitution des expressions (10.54) dans les formules (10.43) et intégration, il vient:

$$\left.\begin{aligned} Gu_x &= -\mathrm{Re}\left[F_1'(z_1)+\frac{1}{2}(1+\beta_2^2)F_2'(z_2)\right];\\ Gu_y &= \mathrm{Jm}\left[\beta_1 F_1'(z_1)+\frac{1+\beta_2^2}{2\beta_2}F_2'(z_2)\right]. \end{aligned}\right\} \quad (10.55)$$

En introduisant ces expressions dans la troisième formule de (10.43), on obtient

$$X_y = 2\mathrm{Jm}\left[\beta_1 F_1''(z_1)+\frac{(1+\beta_2^2)^2}{4\beta_2}F_2''(z_2)\right]. \quad (10.56)$$

Le problème peut également être résolu en déplacements, dans ce cas en reportant les formules (10.43) dans les équations (10.42) il vient:

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{\lambda+2G}{G}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]u_x+\frac{\lambda+G}{G}\cdot\frac{\partial u_y}{\partial x\,\partial y}=\frac{\rho}{G}\cdot\frac{\partial^2 u_x}{\partial \tau^2};\\ &\frac{\lambda+G}{G}\cdot\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\,\partial y}+\left[\frac{\lambda+2G}{G}\cdot\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]u_y=\frac{\rho}{G}\cdot\frac{\partial^2 u_y}{\partial \tau^2}. \end{aligned}\right\} \quad (10.57)$$

Posant

$$\left.\begin{aligned} u_x &= -\frac{\lambda+G}{G}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y};\\ u_y &= \frac{\lambda+2G}{G}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-\frac{\rho}{G}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial \tau^2}, \end{aligned}\right\} \quad (10.58)$$

où $\Phi = \Phi(x, y, \tau)$, on satisfait identiquement la première équation (10.57), tandis que la seconde équation prend la forme de l'équation (10.47)

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c_1^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\left(\nabla^2-\frac{1}{c_2^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\Phi=0, \quad (10.59)$$

qui pour le cas étudié plus haut se résout de façon analogue.

5. Méthode de transformations intégrales [51-53]

On utilise diverses variantes de la méthode de transformations intégrales qui se fonde sur les transformations de Fourier et de Laplace. On fournit plus loin la marche des opérations de résolution suivie par l'une des variantes de cette méthode :

a) pour chaque fonction f entrant dans les équations (10.42) et (10.43) ou dans les équations (10.57) on procède à des transformations intégrales conduisant à des équations plus simples qui contiennent les fonctions $\bar{f}$;

b) on définit les fonctions $\bar{f}$; les constantes de ces fonctions se déterminent sur la base de l'analyse des conditions aux limites;

c) en utilisant le théorème des intégrales de Fourier on transforme les fonctions $\bar{f}$ en fonctions f.

6. Solutions par invariants fonctionnels [54-56]

Selon cette méthode la solution de l'équation d'onde

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c_1^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0 \qquad (10.60)$$

est recherchée sous la forme

$$u = \mathrm{Re}\,[f(\zeta)], \qquad (10.61)$$

où $f(\zeta)$ est une quelconque fonction complexe de l'argument $\zeta(x, y, \tau)$ vérifiant l'équation d'onde [voir solution (10.19)]; $\zeta(x, y, \tau)$ étant la solution à invariant fonctionnel de l'équation (10.60) qui vérifie la condition

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{c_1^2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \tau}\right)^2 = 0. \qquad (10.62)$$

L'intégrale générale du système d'équations différentielles de ζ est prise sous forme implicite :

$$l(\zeta)\,\tau + m(\zeta)\,x + n(\zeta)\,y - k(\zeta) = 0, \qquad (10.63)$$

où l, m, n, k sont des coefficients.

Pour une onde plane les coefficients avec les variables x, y, τ doivent être réels. En fixant deux coefficients, par exemple, l et m, on obtient :

$$k(\zeta) = l\tau - mx \pm \sqrt{1/c_1^2 - m^2 y}, \qquad (10.64)$$

où le signe plus correspond au mouvement de l'onde en direction de la limite et le signe moins, dans le sens opposé.

La méthode développée ainsi permet d'étudier les lois de réflexion des oscillations élastiques sur la surface du corps.

Il a été établi que les conditions aux limites ne peuvent être satisfaites par un seul type d'ondes.

Dans l'incidence sur une limite libre de l'onde de cisaillement

$$\varphi_1 = f\left(l\tau - mx + \sqrt{1/c_1^2 - m^2 y}\right) \qquad (10.65)$$

les deux types d'ondes réflechissent sur la limite:

$$\varphi_2 = Af\left(l\tau + mx - \sqrt{1/c_1^2 - m^2 y}\right)$$

et

$$\psi_2 = Bf\left(l\tau - mx - \sqrt{1/c_2^2 - m^2 y}\right).$$

Les constantes A et B se déterminent à partir des conditions aux limites en y reportant $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ et ψ_2.

VII. PROBLEME THERMODYNAMIQUE

Au cas d'un grand taux de variation avec le temps du champ de température, il faut pour sa pulsation, ou action instantanée de l'impulsion thermique correspondant à l'effet du choc thermique [57], établir les équations différentielles du mouvement (10.1) dans le second membre desquelles entre la fonction de distribution des températures qui dépend des coordonnées et du temps. Dans ce cas les équations (8.3) prennent la forme:

$$\left.\begin{aligned}(\lambda + G)\frac{\partial\theta}{\partial x} + G\nabla^2 u_x &= \rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial\tau^2} + K\alpha\frac{\partial t}{\partial x},\\ (\lambda + G)\frac{\partial\theta}{\partial y} + G\nabla^2 u_y &= \rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial\tau^2} + K\alpha\frac{\partial t}{\partial y},\\ (\lambda + G)\frac{\partial\theta}{\partial z} + G\nabla^2 u_z &= \rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial\tau^2} + K\alpha\frac{\partial t}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \qquad (10.66)$$

Les contraintes se déterminent d'après les formules (8.2).

En l'absence de transfert réciproque d'énergies thermique et mécanique la température $t = t\,(x,\ y,\ z,\ \tau)$ se déduit de l'équation de conduction thermique (8.23) compte tenu des conditions à la surface.

En cas d'existance de transfert réciproque des énergies, il faut prendre en compte l'équation de conduction thermique précisée, voir monographie [40].

En présence au point $M_1\,(x_1,\ y_1,\ z_1)$ d'un corps illimité jouant le rôle de source instantanée de chaleur de contrainte

$$b_1 = \overline{W}/(c\rho)\ (^\circ\mathrm{C}\cdot\mathrm{cm}^3),$$

où $\overline{W}$ (cal·c²/cm) est la quantité de chaleur en calories émanant du point, divisée par g.

L'équation (8.23) prend la forme

$$\varkappa\nabla^2 t = \frac{\partial t}{\partial\tau},$$

tandis que la distribution de la température en tous instant se déduit de sa solution [39]:

$$t(x, y, z, \tau) = \frac{b_1}{(2\sqrt{\pi\varkappa\tau})^3} \exp\left[-\frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}{4\varkappa\tau}\right]. \quad (10.67)$$

Si l'on intègre la solution (10.67) sur tout le volume, il vient

$$\int\int_{-\infty}^{\infty}\int t(x, y, z, \tau)\,dx\,dy\,dz = b_1.$$

Il ressort de la solution (10.67) que $t \to 0$ quand $\tau \to 0$ en tous les points à l'exception du seul point $M_1(x_1, y_1, z_1)$, où ce dernier devient infiniment grand. La relation (10.67) est l'analogue de la fonction de Green.

La distribution de la température au sein d'un corps illimité, aux cas d'un flux de chaleur à deux dimensions engendré par l'action d'une source de chaleur instantanée sur une droite passant par le point $M_1(x_1, y_1)$ parallèlement à l'axe z à l'instant $\tau = 0$, se définit par l'expression

$$t(x, y, \tau) = \frac{b_2}{4\pi\varkappa\tau} \exp\left[-\frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}{4\varkappa\tau}\right], \quad (10.68)$$

car

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int t(x, y, \tau)\,dx\,dy = b_2\ (^\circ\mathrm{C}\cdot\mathrm{cm}^2).$$

La résolution du problème thermodynamique du choc thermique à la surface d'un demi-espace est donnée dans la référence [58].

Problèmes

10.1. Problème de Chree (1892) [59].

Déterminer l'état de contrainte d'un cylindre de rayon b et de longueur $2l$, tournant à la vitesse angulaire p.

Les équations théoriques sont les équations (10.40).

Les conditions aux limites du problème sont:

$$\left.\begin{array}{l} \text{pour } r = b, \quad R_r = Z_r = 0, \\ \text{pour } z = \pm l, \quad R_z = 0 \text{ et } \int_0^b Z_z 2\pi r\,dr = 0. \end{array}\right\} \quad (a)$$

Cette dernière condition est intégrale (au lieu de $Z_z = 0$), mais en vertu du principe de Saint-Venant l'état de contrainte obtenu sera suffisamment précis aux points éloignés des extrémités du cylindre.

En termes de E et de σ les équations (10.40) deviennent

$$\frac{(1-\sigma)E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial r}+\frac{E}{1+\sigma}\cdot\frac{\partial\omega_\beta}{\partial z}=-p^2\rho r;$$

$$\frac{(1-\sigma)E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial z}-\frac{E}{1+\sigma}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r\omega_\beta)=0.$$

La solution de ces équations, satisfaisant aux conditions aux limites (a), a la forme:

$$u_r=Ar-\frac{p^2\rho}{8E}\cdot\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{1-\sigma}r^3,\ u_z=Bz,$$

où

$$A=\frac{p^2\rho b^2}{8E}\cdot\frac{3-5\sigma}{1-\sigma};\qquad B=-\frac{p^2\rho b^2\sigma}{2E}.$$

Les contraintes seront égales à:

$$R_r=\frac{p^2\rho(b^2-r^2)}{8}\cdot\frac{3-2\sigma}{1-\sigma};\quad Z_r=R_z=0;$$

$$B_\beta=\frac{p^2\rho}{8}\left(\frac{3-2\sigma}{1-\sigma}b^2-\frac{1+2\sigma}{1-\sigma}r^2\right);$$

$$Z_z=\frac{p^2\rho(b^2-2r^2)}{4}\cdot\frac{\sigma}{1-\sigma}.$$

10.2. Déterminer l'état de contrainte d'un mince disque annulaire de rayons extérieur b et intérieur a tournant à une vitesse angulaire constante p.

Le disque est sollicité par des forces d'inertie centrifuges (fig. 91). Selon (6.1) l'équation du mouvement est

$$\frac{dR_r}{dr}+\frac{R_r-B_\beta}{r}+p^2\rho r=0\ ^{*}). \tag{a}$$

En reportant dans l'équation (a) la valeur des contraintes (6.5) et en simplifiant par le facteur constant, il vient

$$\frac{d^2u_r}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{du_r}{dr}-\frac{u_r}{r^2}=\frac{\rho(1-\sigma^2)p^2r}{E}. \tag{b}$$

Résolvant l'équation (b), on obtient

$$u_r=C_1r+\frac{C_2}{r}-\frac{\rho(1-\sigma^2)p^2r^3}{8E}.^{**})$$

---

*) Pour $h=h(r)$, l'équation (a) prend la forme:

$$\frac{d}{dr}(hrR_r)-hB_\beta+p^2\rho hr^2=0.$$

**) La solution particulière est prise sous la forme $\overline{u}_r=C_3r^3$.

Selon les formules (6.5)

$$R_r = A - \frac{B}{r^2} - \frac{(3+\sigma)\rho p^2 r^2}{8}; \quad B_\beta = A + \frac{B}{r^2} - \frac{(1+3\sigma)\rho p^2 r^2}{8},$$

où les nouvelles variables inconnues

$$A = EC_1/(1 - \delta) \text{ et } B = EC_2/(1 + \sigma)$$

se déterminent à partir des conditions aux limites:
pour $r = \frac{a}{b}$ $R_r = 0$.

En définitive, les contraintes seront égales à:

$$R_r = \frac{(3+\sigma)\rho p^2}{8}(b^2 - r^2)\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right);$$

$$B_\beta = \frac{(3+\sigma)\rho p^2}{8}\left[b^2 - \frac{1+3\sigma}{3+\sigma}r^2 - a^2\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right)\right].$$

Les épures des contraintes R_r et B_β sont données sur la figure 91.

10.3. Problème de Chree (1898).

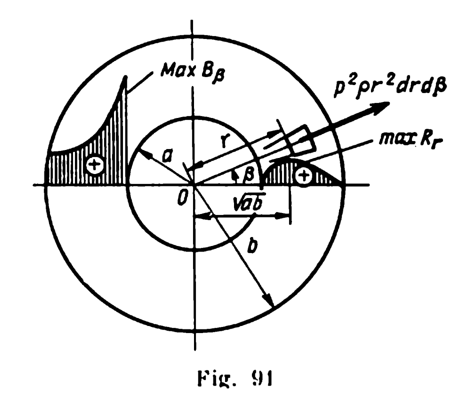


Fig. 91

Déterminer les déplacements de la sphère de rayon a qui tourne autour de l'axe z à la vitesse angulaire p.

Les conditions aux limites (1.2) pour la surface de la sphère avec $r = a$ prennent la forme:

$$X_r = Y_r = Z_r = 0.$$

Les forces dues aux masses des équations (10.41) peuvent être assimulées au gradient de potentiel

$$\varphi = \rho p^2 (x^2 + y^2)/2,$$

qui peut être représenté sous la forme :

$$\varphi = \rho p^2 r^2/2 + \rho p^2 (x^2 + y^2 - 2z^2)/6, \tag{a}$$

où

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Le premier terme de la formule (a) fournit la force volumique purement radiale $2\rho p^2 r/3$ avec un écartement purement radiale u_r ($u_\beta = u_\alpha = 0$), qui se déduit de la première équation (10.40) :

$$(\lambda + 2G)\frac{d}{dr}\left(\frac{du_r}{dr} + 2\frac{u_r}{r}\right) + \frac{2}{3}\rho p^2 r = 0 \tag{b}$$

En résolvant l'équation (b), on obtient

$$u_r = \frac{a^2 \rho p^2}{15(\lambda + 2G)} r \left(\frac{5\lambda + 6G}{3\lambda + 2G} - \frac{r^2}{a^2}\right),$$

d'où

$$u_x,\ u_y,\ u_z = \frac{a^2 \rho p^2}{15(\lambda + 2G)}\left(\frac{5\lambda + 6G}{3\lambda + 2G} - \frac{r^2}{a^2}\right)(x,\ y,\ z)$$

De façon analogue se résout le problème de déformation de la sphère par l'attraction mutuelle de ses particules (Terre).

Le second terme du potentiel φ [voir formule (a)] constitue une fonction sphérique cubique de deuxième degré :

$$V_2 = r^2 Y_2(\alpha) = r^2 P_2(\cos\alpha) = r^2 (3\cos^2\alpha - 1)/2,$$

voir ch. 4).

Les équations (10.41) seront dans ce cas

$$(\lambda + G)\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)\theta + G\nabla^2(u_x,\ u_y,\ u_z) +$$
$$+ \frac{\rho p^2}{6}\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)V_2 = 0.$$

En tenant compte des propriétés des fonctions sphériques (voir ch. 4), on obtient la solution :

$$u_x,\ u_y,\ u_z = A\,[(5\lambda + 7G)\,r^2(x,\ y,\ -2z) -$$
$$-(2\lambda + 7G)(x^2 + y^2 - 2z^2)(x,\ y,\ z)] +$$
$$+ B(x,\ y,\ -2z) - \frac{\rho p^2}{42(\lambda + 2G)}\,[r^2(x,\ y,\ -2z) +$$
$$+ (x^2 + y^2 - 2z^2)(x,\ y,\ z)],$$

où les constantes arbitraires A et B définies d'après les conditions aux limites sont égales à

$$A = -\frac{\rho p^2 (7\lambda + 6G)}{42(\lambda + 2G)(19\lambda + 14G)\,G}; \quad B = \frac{\rho p^2 (4\lambda + 3G)}{3G(19\lambda + 14G)}.$$

10.4. Problème de Pochhammer (1876) [60].

Etudier les oscillations d'un cylindre de révolution isotrope de rayon a dont la surface n'est pas sollicitée par des contraintes.

Pour résoudre le problème profitons de l'équation (3.3b) en substituant aux forces dues à la masse R, B, Z les forces d'inertie; on obtient dans ce cas:

$$\left.\begin{aligned}
&(\lambda+2G)\frac{\partial\theta}{\partial r}-\frac{2G}{r}\cdot\frac{\partial\omega_z}{\partial\beta}+2G\frac{\partial\omega_\beta}{\partial r}=\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial\tau^2};\\
&(\lambda+2G)\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial\beta}-2G\frac{\partial\omega_r}{\partial z}+2G\frac{\partial\omega_z}{\partial r}=\rho\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial\tau^2};\\
&(\lambda+2G)\frac{\partial\theta}{\partial z}-\frac{2G}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r\omega_\beta)+\frac{2G}{r}\cdot\frac{\partial\omega_r}{\partial\beta}=\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial\tau^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

En admettant que les écartements constituent des fonctions harmoniques de z et de τ de l'aspect

$$u_r=Ue^{i(\gamma z+p\tau)},\quad u_\beta=Ve^{i(\gamma z+p\tau)},\quad u_z=We^{i(\gamma z+p\tau)},$$

où U, V et W sont des fonctions de r et de β, on aboutit à une série de solutions.

O s c i l l a t i o n s d e t o r s i o n.

Pour $U = W = 0$ et $V = V(r)$ la première et la troisième équations de (a) se vérifient identiquement, tandis que la seconde équation devient une équation de Bessel:

$$\frac{d^2V}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{dV}{dr}+\left(\varkappa^2-\frac{1}{r^2}\right)V=0, \tag{b}$$

où $\varkappa^2 = \rho p^2/G - \gamma^2$.

En intégrant l'équation (b), il vient

$$V = AJ_1(\varkappa, r),$$

où $J_1(\varkappa, r)$ est la fonction de Bessel du premier ordre.

Les conditions sur la surface sont satisfaites si $\varkappa$ est une racine de l'équation

$$\frac{d}{da}\left[\frac{J_1(\varkappa, a)}{a}\right]=0.$$

Pour $\varkappa = 0$, $\gamma^2 = \rho p^2/G$ et $V = Ar$ les déplacements seront égaux à:

$$u_r=u_z=0,\quad u_\beta=Are^{ip\left(\sqrt{\frac{\rho}{G}}z-\tau\right)}. \tag{c}$$

La solution (c) est une onde de torsion qui se propage le long de l'axe du cylindre avec la vitesse $c_2 = \sqrt{G/\rho}$.

Pour un cylindre de longueur l, dont les bases ne sont pas sollicitées par des contraintes, on obtient:

$$u_\beta=A_n r\cos\frac{n\pi r}{l}\cos\left(\frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{G}{\rho}}\tau+\varepsilon\right),$$

où n est nombre entier; ε la phase des oscillations.

Oscillations longitudinales.

Pour $V = 0$, $U = U(r)$, $W = W(r)$ la seconde équation de (a) est satisfaite identiquement, tandis que la première et la troisième équations prennent la forme des équations de Bessel:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial r}+h^2\theta=0; \quad \frac{\partial^2\omega_\beta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\omega_b}{\partial r}+\left(\varkappa^2-\frac{1}{r^2}\right)\omega_\beta=0 \quad \text{(d)}$$

où

$$h^2=\rho p^2/(\lambda+2G)-\gamma^2, \quad \varkappa^2=\rho p^2/G-\gamma^2.$$

En résolvant l'équation (d), on trouve

$$\theta \propto J_0(hr) \quad \text{et } \omega_\beta \propto J_1(\varkappa r).$$

En satisfaisant les équations

$$\theta=\left(\frac{dU}{dr}+\frac{U}{r}+i\gamma W\right)e^{i(\gamma z+p\tau)}, \quad 2\omega_\beta=\left(i\gamma U-\frac{dW}{dr}\right)e^{i(\gamma z+p\tau)},$$

il vient

$$U=A\frac{d}{dr}J_0(hr)+B\gamma J_1(\varkappa r); \quad W=Ai\gamma J_0(hr)+\frac{B}{r}\cdot\frac{d}{dr}[rJ_1(\varkappa r)].$$

Les contraintes à la surface du cylindre $r = a$ sont nulles au cas où les constantes A et B sont liées par les équations:

$$\left.\begin{aligned}&\left[2G\frac{d^2J_0(ha)}{da^2}-\frac{\rho p^2\lambda}{\lambda+2G}J_0(ha)\right]A+2G\gamma\frac{dJ_1(\varkappa a)}{da}B=0,\\ &2\gamma\frac{dJ_0(ha)}{da}A+\left(2\gamma^2-\frac{\rho p^2}{G}\right)J_1(\varkappa a)B=0.\end{aligned}\right\} \quad \text{(e)}$$

En égalant à zéro le déterminant des équations (e), on obtien l'équation permettant de trouver les fréquences.

Oscillations transversales.

En posant

$$U = U(r)\cos\beta, \; V = V(r)\sin\beta, \; W = W(r)\cos\beta$$

et en reportant ces grandeurs dans l'équation (a), on obtient trois équations différentielles par rapport aux fonctions $U(r)$, $V(r)$, $W(r)$, dont la solution a l'aspect:

$$U(r)=A\frac{dJ_1(hr)}{dr}+B\gamma\frac{dJ_1(\varkappa r)}{dr}+C\frac{J_1(\varkappa r)}{r};$$

$$V(r)=-A\frac{J_1(hr)}{r}-B\gamma\frac{J_1(\varkappa r)}{r}-C\frac{dJ_1(\varkappa r)}{dr}.$$

$$W(r)=iA\gamma J_1(hr)-iB\varkappa^2J_1(\varkappa r).$$

Les conditions de l'absence de contraintes à la surface ont un aspect compliqué et ne sont pas données ici [5].

10.5. Etudier les oscillations radiales d'un disque annulaire mince ($\delta = 1$) dont le rayon intérieur est a et le rayon extérieur b et dont le bord est exempt de contraintes.

Comme le problème est de symétrie polaire l'équation théorique en déplacements selon l'équation (6.7) prend la forme:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\right)u_r-\frac{1-\sigma^2}{E}\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial\tau^2}=0.$$

En posant

$$u_r = W\cos(p\tau+\varepsilon)\ ^{*}),$$

on obtient l'équation de Bessel:

$$\frac{d^2W}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{dW}{dr}+\left(\varkappa^2-\frac{1}{r^2}\right)W=0, \qquad \text{(a)}$$

où

$$\varkappa^2=\frac{1-\sigma^2}{E}\rho p^2.$$

En résolvant l'équation (a), il vient

$$W = AJ_1(\varkappa r) + BN_1(\varkappa r),$$

en définitive le déplacement acquiert l'aspect

$$u_r = [AJ_1(\varkappa r) + BN_1(\varkappa r)]\cos(p\tau+\varepsilon).$$

Les contraintes se déterminent d'après les formules (6.5).

Sur les bords du disque quand $r = a$ et $r = b$ les contraintes R_r sont nulles; il s'ensuit deux équations:

$$A\left[\frac{dJ_1(\varkappa a)}{da}+\frac{\sigma}{a}J_1(\varkappa a)\right]+B\left[\frac{dN_1(\varkappa a)}{da}+\frac{\sigma}{a}N_1(\varkappa a)\right]=0$$

et

$$A\left[\frac{dJ_1(\varkappa b)}{db}+\frac{\sigma}{b}J_1(\varkappa b)\right]+B\left[\frac{dN_1(\varkappa b)}{db}+\frac{\sigma}{b}N_1(\varkappa b)\right]=0.$$

En éliminant de ces équations A et B, on obtient l'équation des fréquences.

10.6. Problème de Poisson (1828) [3].

Etudier les oscillations radiales d'une sphère creuse de rayons extérieur b et intérieur a.

Le problème est de symétrie polaire: toutes les grandeurs ne dépendent que de r et de τ et $u_\alpha = u_\beta = \omega_r = \omega_\beta = \omega_\alpha = 0$.

---

*) Le problème peut être résolu également par la méthode de séparation des variables, en posant $u_r = R(r)\,T(\tau)$.

Selon la première équation de (3.3b), il vient

$$(\lambda+2G)\frac{\partial\theta}{\partial r}-\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial\tau^2}=0,$$

où

$$\theta=\frac{\partial u_r}{\partial r}+2\frac{u_r}{r} \text{ [voir formule (2.2b)].}$$

En posant

$$u_r = AW(r)\cos(p\tau+\varepsilon)$$

on obtient l'équation

$$\frac{d^2W}{dr^2}+\frac{2}{r}\cdot\frac{dW}{dr}+\left(h^2-\frac{2}{r^2}\right)W=0, \qquad \text{(a)}$$

où

$$h^2 = \rho p^2/(\lambda+2G).$$

L'intégrale de l'équation (a) est

$$W(r)=\frac{d}{d(hr)}\left(\frac{A\sin hr+B\cos hr}{hr}\right).$$

Les conditions aux limites du problème sont:
pour $r=\substack{a\\b}$,

$$R_r=\lambda\theta+2G\frac{\partial u_r}{\partial r}=(\lambda+2G)\frac{\partial u_r}{\partial r}+2\lambda\frac{u_r}{r}=0. \qquad \text{(b)}$$

La condition (b) pour une sphère de rayon r a la forme:

$$\{(\lambda+2G)[(2-h^2r^2)\sin hr-2hr\cos hr]+$$
$$+2\lambda(hr\cos hr-\sin hr)\}A+\{(\lambda+2G)[(2-h^2r^2)\cos hr+$$
$$+2hr\sin hr]-2\lambda(hr\sin hr+\cos hr)\}B=0.$$

Après avoir écrit la dernière équation pour les valeurs de $r=a$ et $r=b$ et éliminé de ces équations A et B, on obtient l'équation des fréquences:

$$\frac{Kha+(h^2a^2-K)\operatorname{tg} ha}{(h^2a^2-K)-Kha\operatorname{tg} ha}=\frac{Khb+(h^2b^2-K)\operatorname{tg} hb}{(h^2b^2-K)-Khb\operatorname{tg} hb},$$

où

$$2-K=2\lambda/(\lambda+2G).$$

Pour une couche très mince la période

$$T=\pi a\sqrt{\frac{\rho}{G}\cdot\frac{1-\sigma}{1-\sigma}}.$$

Pour une sphère pleine $B=0$.

▶ Problème de Lamb (1882) [4].

Etudier les oscillations d'une sphère pleine de rayon a au cas où $\theta=0$.

Conseils:

1. La solution des équations homogènes (10.7) doit être prise sous la forme:

$$u_{x,\,y,\,z} = R\,(r)\,Y_{x,\,y,\,z}\,(\alpha,\ \beta).$$

2. Pour déterminer les relations liant les fonctions $Y_{x,\,y,\,z}\,(\alpha,\ \beta)$ utiliser la condition (10.9).

10.7. Déterminer les déplacements dans un corps infini dus à la force ponctuelle $\chi\,(\tau)$ appliquée à l'origine des coordonnées et agissant en direction de l'axe x.

Dans la résolution on suppose que le domaine D, où les forces dues aux masses sont différentes de zéro, diminue de façon illimitée, tandis que

$$\rho \iiint\limits_D X'\,dx'\,dy'\,dz' = X_0,$$

où X_0 est la force sollicitant le point $(x',\ y',\ z')$ en direction de l'axe x.

On suppose dans le cas considéré que

$$X_0 = \chi\,(\tau - r/c_1),$$

où r est la distance du point $(x,\ y,\ z)$ de l'origine des coordonnées.

Selon les formules (10.39), on détermine les grandeurs:

$$\Phi'\,(\tau - r/c_1) = -\frac{1}{4\pi\rho}\,\chi\,(\tau - r/c_1)\,\frac{\partial r^{-1}}{\partial x'}\,; \quad L' = 0\,;$$

$$M'\,(\tau - r/c_2) = \frac{1}{4\pi\rho}\,\chi\,(\tau - r/c_2)\,\frac{\partial r^{-1}}{\partial z'}\,;$$

$$N'\,(\tau - r/c_2) = -\frac{1}{4\pi\rho}\,\chi\,(\tau - r/c_2)\,\frac{\partial r^{-1}}{\partial y'}\,.$$

En divisant l'espace autour du point $(x,\ y,\ z)$ en des couches minces par des surfaces sphériques de centre situé en ce point, on est en mesure d'exprimer les intégrales (10.38) à l'aide des formules:

$$\iiint \frac{1}{r}\,\Phi'\left(\tau - \frac{r}{c_1}\right) dx'\,dy'\,dz' = \int\limits_0^\infty -\frac{1}{4\pi\rho}\,\chi\left(\tau - \frac{r}{c_1}\right)\frac{dr}{r}\iint \frac{\partial r^{-1}}{\partial x'}\,ds,$$

où ds est un élément de surface de la sphère de rayon r; $\iint \frac{\partial r^{-1}}{\partial x'}\,ds = 0$, au cas où l'origine des coordonnées se trouve à l'intérieur de s; $\iint \frac{\partial r^{-1}}{\partial x'}\,ds = 4\pi r^2\,\frac{\partial r_0^{-1}}{\partial x}$, pour le cas où l'origine des coordonnées est en dehors de s; r_0 la distance du point $(x,\ y,\ z)$ de l'origine des coordonnées.

Dans le premier cas $r_0 < r$, dans le second $r_0 > r$.

En intégrant par rapport à r, on peut remplacer la limite supérieure par r_0:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi c_1^2 \rho} \cdot \frac{\partial r_0^{-1}}{\partial x} \int_0^{r_0} r\chi(\tau - r/c_1)\, dr =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial r^{-1}}{\partial x} \int_0^{r/c_1} \tau' \chi(\tau - \tau')\, d\tau', \qquad \text{(a)}$$

où $\tau' = r/c_1$ et au lieu de r_0 figure r.

De façon analogue on trouve:

$$\left.\begin{aligned} F &= 0; \\ G &= \frac{1}{4\pi\rho} \cdot \frac{\partial r^{-1}}{\partial z} \int_0^{r/c_2} \tau' \chi(\tau - \tau')\, d\tau'; \\ H &= -\frac{1}{4\pi\rho} \cdot \frac{\partial r^{-1}}{\partial y} \int_0^{r/c_2} \tau' \chi(\tau - \tau')\, d\tau'. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(b)}$$

En déterminant les déplacements d'après les formules (10.36), compte tenu des formules (a) et (b), il vient:

$$\left.\begin{aligned} u_x &= \frac{1}{4\pi\rho} \cdot \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x^2} \int_{r/c_1}^{r/c_2} \tau' \chi(\tau - \tau')\, d\tau' + \\ &+ \frac{1}{4\pi\rho r} \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \left[\frac{1}{c_1^2} \chi(\tau - r/c_1) - \frac{1}{c_2^2} \chi\left(\tau - \frac{r}{c_2}\right)\right] + \frac{\chi(\tau - r/c_2)}{4\pi\rho c_2^2 r}; \\ u_y &= \frac{1}{4\pi\rho} \cdot \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x\, \partial y} \int_{r/c_1}^{r/c_2} \tau' \chi(\tau - \tau')\, d\tau' + \\ &+ \frac{1}{4\pi\rho r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} \left[\frac{1}{c_1^2} \chi\left(\tau - \frac{r}{c_1}\right) - \frac{1}{c_2^2} \chi\left(\tau - \frac{r}{c_2}\right)\right]; \\ u_z &= \frac{1}{4\pi\rho} \cdot \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x\, \partial z} \int_{r/c_1}^{r/c_2} \tau' \chi(\tau - \tau')^{d\tau'} + \\ &+ \frac{1}{4\pi\rho r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} \left[\frac{1}{c_1^2} \chi\left(\tau - \frac{r}{c_1}\right) - \frac{1}{c_2^2} \chi\left(\tau - \frac{r}{c_2}\right)\right]; \\ \theta &= \frac{1}{4\pi c_1^2 \rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{r} \chi\left(\tau - \frac{r}{c_1}\right)\right]; \\ \omega_{x,y,z} &= \frac{1}{8\pi c_2^2 \rho} \left(0, \frac{\partial}{\partial z}, -\frac{\partial}{\partial y}\right) \left[\frac{1}{r} \chi\left(\tau - \frac{r}{c_2}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(c)}$$

▶ Calculer les déplacements pour $\chi(\tau) = A \cos p\tau$.
Rappel explicatif:

$$\int_{r/c_1}^{r/c_2} \tau'\chi(\tau-\tau')\,d\tau' = \frac{A}{p^2}\Big[\cos p(\tau - r/c_2) - \cos p(\tau - r/c_1) -$$
$$- \frac{pr}{c_2}\sin p(\tau - r/c_2) + \frac{pr}{c_1}\sin p(\tau - r/c_1)\Big].$$

Le phénomène consiste dans la propagation d'ondes harmoniques simples de deux espèces avec les vitesses $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2G)/\rho}$ (onde de dilatation cubique) et $c_2 = \sqrt{G/\rho}$ (onde de cisaillement).

▶ Calculer les déplacements (c) quand $\chi(\tau) = \text{const}$ et comparer avec les résultats du problème 4.5.

10.8. Voir monographie [51], § 76.

Déterminer les déplacements du demi-plan $y \geqslant 0$, quand à la limite $y = 0$ est appliquée une impulsion de pression normale se mouvant à la vitesse c.

Les conditions aux limites ont la forme:
pour $y = 0$

$$Y_y = -[P''(x - c\tau) + \bar{P}''(x - c\tau)]/2, \tag{a}$$
$$X_y = 0. \tag{b}$$

En posant dans l'expression (10.56) $\eta = 0$, on trouve que l'équation (b) est vérifiée, si l'on admet que

$$\beta_1 F_1''(\xi) + \frac{(1+\beta_2^2)^2}{4\beta_2} F_2''(\xi) = 0,$$

d'où

$$F_2''(z_2) = -\frac{4\beta_1\beta_2}{(1+\beta_2^2)^2} F_1''(z_2). \tag{c}$$

En reportant la dernière relation dans la formule (10.54), on obtient pour Y_y l'expression suivante:

$$Y_y = (1+\beta_2^2)^{-1}\,\mathrm{Re}\,[(1+\beta_2^2)^2 F_1''(z_1) + 4\beta_1\beta_2 F_1''(z_2)].$$

Donc, la condition aux limites (a) sera satisfaite si l'on suppose que

$$F_1(\xi) = -\frac{(1+\beta_2^2)^2 P(\xi)}{(1+\beta_2^2)^2 - 4\beta_1\beta_2}. \tag{d}$$

Selon les expressions (10.55) et les équations (c) et (d)

$$\left.\begin{aligned} Cu_x &= \frac{1+\beta_2^2}{(1+\beta_2^2)^2 - 4\beta_1\beta_2}\,\mathrm{Re}\left[R'(z_1) - \frac{3\beta_1\beta_2}{(1+\beta_2^2)^2} P'(z_2)\right], \\ Cu_y &= -\frac{\beta_1}{(1+\beta_2^2)^2 - 4\beta_1\beta_2}\,\mathrm{Im}\,[(1+\beta_2^2) P'(z_1) - 2P'(z_2)]. \end{aligned}\right\} \tag{e}$$

Les formules (e) traduisent la solution de Sneddon.

▶ Problème de Sneddon [61].

Résoudre le même problème pour des cas d'impulsion de pression tangentielle mobile.

Conseil. Les conditions aux limites sont prises sous la forme (pour $x=0$) :

$$Y_y = 0;\ X_y = -[T''(x - c\tau) + \overline{T}''(x - c\tau)]/2.$$

▶ Problème de Galine [43, 51, § 76].

Etudier l'état de contrainte dans un demi-plan $y \geqslant 0$ dû au mouvement de la matrice sur sa surface à la vitesse c.

10.9. Voir monographie [51], § 77.

Déterminer les déplacements dans le demi-plan $y \geqslant 0$ quand sa limite $y = 0$ est sollicitée par une pression variable $p(x, \tau)$.

Introduisons la variable $\tau' = c_1\tau$.

Les conditions aux limites du problème prennent la forme: pour $y = 0$

$$Y_y = -p(x, \tau'),\ X_y = 0. \tag{a}$$

Pour résoudre le problème introduisons pour toutes les grandeurs entrant dans les expressions (10.42) et (10.34) la transformation de Fourier à deux dimensions définie par la formule

$$\overline{f}(\xi, y, \omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, \tau')\, e^{i(\xi x + \omega\tau')}\, dx\, d\tau'.$$

Si les deux membres de chacune des équations des systèmes (10.42) et (10.43) sont multipliés par exp $[i(\xi x + \omega\tau'')]$, puis sont intégrés en chacune des variables x et τ' de $-\infty$ à ∞ *), on obtiendra alors un système d'équations différentielles compatibles:

$$i\xi\overline{X}_x - \frac{d\overline{Y}_x}{dy} = (\lambda + 2G)\,\omega^2\overline{u}_x;\quad i\xi\overline{Y}_x - \frac{d\overline{Y}_y}{dy} = (\lambda + 2G)\,\omega^2 u_y. \tag{b}$$

Les contraintes se déterminent d'après les formules:

$$\left.\begin{aligned}\overline{X}_x &= -i\xi(\lambda + 2G)\,\overline{u}_x + \lambda\frac{d\overline{u}_y}{dy};\\ \overline{Y}_y &= -i\lambda\overline{u}_x + (\lambda + 2G)\frac{d\overline{u}_y}{dy};\\ \overline{Y}_x &= G\left(\frac{d\overline{u}_x}{dy} - i\xi\overline{u}_y\right).\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

---

*) On suppose que les équations inconnues (10.42) et (10.43) tendent vers zéro quand la grandeur $\sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$.

Si les formules (c) sont portées dans les équations (b), on obtient pour la détermination des transformations de Fourier des fonctions $\bar{u}_x$ et $\bar{u}_y$ deux équations différentielles compatibles:

$$\left.\begin{aligned}(\beta^2-1)\, i\xi\frac{d\bar{u}_x}{dy}+\left[\xi^2-\beta^2\left(\omega^2+\frac{d^2}{dy^2}\right)\right]\bar{u}_y=0\,;\\ \left[\beta^2(\xi^2-\omega^2)-\frac{d^2}{dy^2}\right]\bar{u}_x+(\beta^2-1)\, i\xi\frac{d\bar{u}_y}{dy}=0,\end{aligned}\right\}\qquad\text{(d)}$$

où

$$\beta^2 = (\lambda + 2G)/G.$$

Par élimination des termes les équations (d) peuvent être réduites en forme condensée:

$$\left(\frac{d^2}{dy^2}-n_1^2\right)\left(\frac{d^2}{dy^2}-n_2^2\right)(\bar{u}_x,\ \bar{u}_y)=0,\qquad\text{(e)}$$

où

$$n_1^2 = \xi^2 - \omega^2,\ n_2^2 = \xi^2 - \beta^2\omega^2.$$

Des équations (e) on tire:

$$\left.\begin{aligned}\bar{u}_x=A_1e^{-n_1y}+A_2e^{-n_2y}\,;\\ \bar{u}_y=B_1e^{-n_1y}+B_2e^{-n_2y},\end{aligned}\right\}\qquad\text{(f)}$$

où les constantes d'intégration A_i et B_i dépendent de ξ et de ω.

En reportant les expressions (f) dans les équations (d), on obtient les relations suivantes entre les constantes d'intégration:

$$\xi A_2 = in_2B_1,\ n_1A_1 = i\xi B_1.\qquad\text{(g)}$$

En transformant les conditions aux limites (a), on obtient encore deux équations:

$$\left.\begin{aligned}G\left[(\beta^2-2)\frac{d\bar{u}_y}{dy}-i\xi\beta^2\bar{u}_x\right]_{y=0}=-\bar{p}(\xi,\ \omega)\,;\\ \left[\frac{d\bar{u}_x}{dy}-i\xi\bar{u}_y\right]_{y=0}=0.\end{aligned}\right\}\qquad\text{(h)}$$

En résolvant les équations (g) et (h), il vient:

$$A_1=\frac{i\xi\bar{p}\,(\xi^2-\beta^2\omega^2/2)}{2Gc}\,;\quad A_2=-\frac{i\xi n_1n_2\bar{p}}{2Gc}\,;$$

$$B_1=\frac{n_1\bar{p}\,(\xi^2-\beta^2\omega^2/2)}{2Gc}\,;\quad B_2=-\frac{\xi^2n_1\bar{p}}{2Gc},$$

où

$$c=c\,(\xi,\ \omega)=(\xi^2-\beta^2\omega^2/2)^2-n_1n_2\xi^2.$$

En reportant ces constantes dans les équations (f) et en inversant les expressions obtenues ainsi à l'aide du théorème de Fourier à deux

dimensions, on obtient pour les composantes du vecteur déplacement les expressions suivantes:

$$u_x=\frac{1}{4\pi G}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{p}}{c}\left[i\xi\left(\xi^2-\frac{1}{2}\beta^2\omega^2\right)e^{-n_1 y}-i\xi n_1 n_2 e^{-n_2 y}\right]\times$$
$$\times e^{-i(\xi x+\omega\tau')}\,d\xi\,d\omega;$$

$$u_y=\frac{1}{4\pi G}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{p}}{c}\left[n_1\left(\xi^2-\frac{1}{2}\beta^2\omega^2\right)e^{-n_1 y}-\xi^2 n_1 e^{-n_2 y}\right]\times$$
$$\times e^{-i(\xi x+\omega\tau')}\,d\xi\,d\omega.$$

La résolution de ce problème par la méthode des transformations intégrales est donnée dans les monographies [52], p. 499-501.

10.10. Voir article [62].

Etudier les oscillations d'un demi-plan élastique $y \geqslant 0$ quand à sa limite commence à agir une source de déplacements élastiques. Pour $\tau \leqslant 0$ le demi-plan est au repos.

Au cas de déformation plane et en l'absence de forces volumiques les équations de Lamé prennent la forme:

$$(\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial x}+G\nabla^2 u_x=\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial\tau^2};\quad (\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial y}+G\nabla^2 u_y=\rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial\tau^2}.$$

Dans un état de contrainte plan au lieu de λ il faut prendre

$$\lambda^* = 2\lambda G/(\lambda + 2G).$$

Les contraintes se déterminent d'après les formules:

$$X_x=\lambda\theta+2G\frac{\partial u_x}{\partial x};\quad Y_y=\lambda\theta+2G\frac{\partial u_y}{\partial y};\quad X_y=G\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right).$$

Posons que pour $x\to\infty$ et $|y|\to\infty$ toutes les composantes du vecteur déplacement et du tenseur des contraintes tendent vers zéro. Introduisons dans l'étude la fonction $\Phi(x, y, \tau)$ et exprimons à l'aide de cette dernière les déplacements:

$$u_x=-\frac{\lambda+G}{G}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y};\quad u_y=\frac{\lambda+2G}{G}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\frac{\rho}{G}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2}. \qquad \text{(b)}$$

En portant les expressions (b) dans les équations (a) on aboutit à l'équation (10.59). Les contraintes seront exprimées au moyen de la fonction Φ de la façon suivante:

$$\left.\begin{aligned}
X_x&=-(\lambda+2G)\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\,\partial y}+\lambda\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}-\frac{\rho\lambda}{G}\cdot\frac{\partial^3\Phi}{\partial y\,\partial\tau^2};\\
Y_y&=(3\lambda+4G)\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\,\partial y}+(\lambda+2G)\frac{\partial^3\Phi}{\partial y^3}-(\lambda+2G)\frac{\rho}{G}\frac{\partial^3\Phi}{\partial y\,\partial\tau^2};\\
X_y&=Y_x=-\lambda\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\,\partial y^2}+(\lambda+2G)\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}-\rho\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\,\partial\tau^2}.
\end{aligned}\right\}\qquad \text{(c)}$$

Pour résoudre l'équation (10.59) appliquons deux transformations intégrales, à savoir: la transformation de Laplace suivant la variable τ et la transformation complexe de Fourier suivant la variable y.

Etant donné que l'on étudie le cas de conditions initiales nulles, on doit poser

$$\Phi(x, y, 0)=\frac{\partial\Phi(x, y, 0)}{\partial\tau}=\frac{\partial^2\Phi(x, y, 0)}{\partial\tau^2}=\frac{\partial^3\Phi(x, y, 0)}{\partial\tau^3}=0.$$

En multipliant l'équation (10.59) par $e^{-p\tau}$ et en intégrant par rapport à τ de 0 à ∞, on obtient une équation différentielle auxiliaire $\overline{\Phi}$ à deux variables indépendantes $-x$ et y:

$$(\nabla^2-p^2/c_1^2)(\nabla^2-p^2/c_2^2)\overline{\Phi}(x, y, p)=0, \qquad \text{(d)}$$

où

$$\overline{\Phi}(x, y, p)=\int_0^\infty e^{-p\tau}\Phi(x, y, \tau)\,d\tau.$$

En multipliant l'équation (d) par $e^{i\alpha x}$ et en intégrant par rapport à x de $-\infty$ à $+\infty$, on obtient une équation différentielle

$$\left(\frac{d^2}{dy^2}-\alpha^2-\frac{p^2}{c_1^2}\right)\left(\frac{d^2}{dy^2}-\alpha^2-\frac{p^2}{c_2^2}\right)\overline{F}(\alpha, y, p)=0, \qquad \text{(e)}$$

où

$$\overline{F}(\alpha, y, p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\overline{\Phi}(x, y, p)\,dx.$$

Etant limitée à l'infini la solution de l'équation (e) a l'aspect:

$$\overline{F}(\alpha, y, p)=A\exp\left(-y\sqrt{\alpha^2+p^2/c_1^2}\right)+B\exp\left(-y\sqrt{\alpha^2+p^2/c_2^2}\right),$$

où A et B se déterminent des conditions aux limites de demi-plan $y=0$.

En profitant de la formule d'inversion de la transformation complexe de Fourier:

$$\overline{\Phi}(x, y, p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x}\overline{F}(\alpha, y, p)\,d\alpha,$$

on trouve que

$$\overline{\Phi}(x, y, p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x}\left[A(\alpha, p)\exp\left(-y\sqrt{\alpha^2+p^2/c_1^2}\right)+\right.$$
$$\left.+B(\alpha, p)\exp\left(-y\sqrt{\alpha^2+p^2/c_2^2}\right)\right]d\alpha.$$

En utilisant ensuite la formule d'inversion de la transformation de Laplace :

$$\Phi(x, y, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{p\tau} \overline{\Phi}(x, y, p)\, dp,$$

on obtient, en définitive,

$$\Phi(x, y, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{p\tau} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} \times \right.$$
$$\times \left[A(\alpha, p) \exp\left(-y\sqrt{\alpha^2 + p^2/c_1^2}\right) + \right.$$
$$\left. \left. + B(\alpha, p) \exp\left(-y\sqrt{\alpha^2 + p^2/c_2^2}\right) \right] d\alpha \right\} dp, \qquad \text{(f)}$$

où $A(\alpha, p)$ et $B(\alpha, p)$ se déterminent à partir des conditions aux limites.

Après avoir obtenu des expressions (f) $\Phi(x, y, \tau)$, on calcule d'après les formules (b) les composantes du déplacement, et d'après les formules (c) celles de la contrainte.

CHAPITRE 11

THÉORÈMES GÉNÉRAUX DE LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ, PRINCIPES VARIATIONNELS ET MÉTHODES VARIATIONNELLES DE RÉSOLUTION DES PROBLÈMES DE LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ

I. CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES

Les solutions générales des équations fondamentales de la théorie de l'élasticité de Galerkine, de Papkovitch, de Neuber, etc. (voir ch. 4), où entrent les fonctions harmoniques et biharmoniques arbitraires, sont difficilement utilisables dans la résolution des problèmes concrets, car il n'a pas été décelé de méthode générale permettant de déterminer ces fonctions sur la base des conditions aux limites.

La position des problèmes de la théorie de l'élasticité se heurte à de grandes difficultés mathématiques quand on recherche la solution des équations fondamentales ou on essaye de satisfaire aux conditions aux limites, aussi la solution n'est-elle menée que jusqu'aux formules théoriques applicables à des situations pratiques dans un nombre limité de cas. C'est pourquoi on utilise très souvent diverses *méthodes approchées* de résolution des problèmes aux limites (méthode de différences finies, de fonctions initiales, etc., voir

ch. 5), y compris, les méthodes variationnelles se basant sur les principes variationnels de la théorie de l'élasticité qui fournissent des procédés efficaces de solution numérique des problèmes aux limites [63, 64, 65].

II. THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LE CORPS LINÉAIREMENT ÉLASTIQUE

1. Théorème de Clapeyron (1858)

Au cas d'un effort statique sur un corps non chargé et démuni de contraintes initiales, le travail accompli par cette force est égal à la moitié du produit de la valeur définitive de la force par la valeur définitive du déplacement dans la direction de la force

$$T = \frac{1}{2} P u, \tag{11.1}$$

pour n forces

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} P_k u_k. \tag{11.2}$$

2. Principe de conservation de l'énergie

A tous les stades de déformation du corps, la somme des travaux extérieurs T et intérieurs U est nulle

$$T + U = 0 \text{ *)} \tag{11.3}$$

ou

$$T - \Pi = 0.$$

3. Théorème de Betty (1872)

Le travail virtuel des forces extérieures ou intérieures du premier état appliquées au corps le long des déplacements correspondants du second état, est égal au travail virtuel des forces extérieures ou intérieures de second état sur les déplacements correspondants du premier état

$$T_{21} = T_{12} \quad \text{et} \quad U_{21} = U_{12}. \tag{11.4}$$

4. Théorème de Castigliano (1875)

La dérivée partielle de l'énergie potentielle Π d'une force quelconque P_k est égale au déplacement suivant la direction de cette force u_k

$$\frac{\partial \Pi}{\partial P_k} = u_k. \tag{11.5}$$

*) La loi est vérifiée de façon approchée, car une partie du travail des forces élastiques se transforme en d'autres formes d'énergie: thermique, électromagnétique.

La relation suivante se justifie également

$$P_k = \frac{\partial \Pi}{\partial u_k}.$$

III. PRINCIPES VARIATIONNELS

1. Principe de Lejeune-Dirichlet

A l'état d'équilibre stable du corps correspond le minimum de l'énergie potentiel totale E, à l'état instable le maximum, à l'état indifférent sa valeur constante ou nulle (fig. 92)

$$E = E_{\text{extr}}. \tag{11.6}$$

2. Principe des déplacements virtuels de Lagrange (1788)

Un corps élastique en état d'équilibre effectue des déplacements qui communiquent à son énergie potentielle totale E la valeur minimale

$$\delta E\,(u_x,\ u_y,\ u_z) = 0, \tag{11.7}$$

où

$$E = T - U = \int_F (X_\nu u_x + Y_\nu u_y + Z_\nu u_z)\,dF + \int_V (Xu_x + Yu_y + Zu_z)\,dV -$$

$$- \int_V (X_x \varepsilon_x + Y_y \varepsilon_y + Z_z \varepsilon_z + X_y \varepsilon_{xy} + X_z \varepsilon_{xz} + Y_z \varepsilon_{yz})\,dV,$$

$$dV = dx\,dy\,dz,$$

u_x, u_y, u_z étant les déplacements réels du corps. Puisque les forces dues aux masses (X, Y, Z) et celles de surface (X_ν, Y_ν, Z_ν) pour

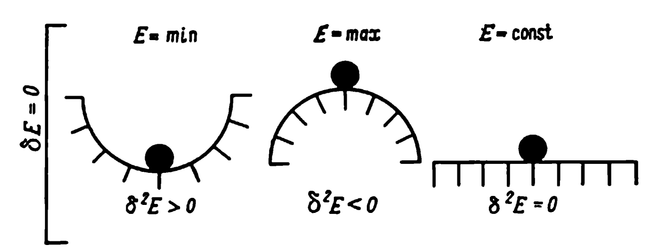


Fig. 92

les déplacements donnés restent constantes, autrement dit ne varient pas, l'équation (11.7), compte tenu de la formule de Gauss-

Ostrogradski, peut s'écrire sous la forme

$$\delta u_j \left[\int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + X_j \right) dV + \int_F (X_{\nu_j} - \alpha_{\nu_i} \sigma_{ij})\, dF \right] = 0\ ^{*}). \quad (11.8)$$

Etant donné l'indépendance des déplacements virtuels δu_j (δu_x, δu_y, δu_z), de l'équation (11.8) se déduisent les équations d'équilibre du corps et les conditions aux limites:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + X_j = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_{\nu_i} \sigma_{ij} = X_{\nu_j}, \quad (11.9)$$

où $\alpha_{\nu_i} = \cos \nu x_i$ sont les cosinus directeurs de la normale à la surface du corps F.

Si l'énergie potentielle totale du corps (du système) s'exprime de façon approchée au moyen de n paramètres géométriques a_i, dont le nombre est égal au degré de liberté donné du corps (du système), c'est-à-dire si

$$E = E(a_1, a_2, \ldots, a_n), \quad (11.10)$$

alors, selon l'équation (11.6), on peut déterminer les paramètres a_i à partir des conditions de la valeur extrémale de la fonction E à n variables:

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial a_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial E}{\partial a_n} = 0. \quad (11.11)$$

Les équations (11.11), si elles sont multipliées respectivement par $\delta a_i \neq 0$, deviennent alors des équations du principe des déplacements virtuels

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} \delta a_1 = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial a_2} \delta a_2 = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial E}{\partial a_n} \delta a_n = 0. \quad (11.12)$$

Si l'énergie potentielle totale du corps (du système) est donnée en forme intégrale

$$E = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', y'', \ldots, y^n)\, dx, \quad (11.13)$$

on peut, en recherchant la valeur maximale de E, utiliser le problème direct de calcul des variations. Pour obtenir la valeur extrémale de

---

*) Ici et plus loin $i, j = 1, 2, 3$; $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$.

l'intégrale (11.13), la fonction F doit satisfaire à l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)-\ldots\pm\frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial F}{\partial y^n}=0\,^{*)} \qquad (11.14)$$

qui constituera précisément l'équation résolvante principale du problème.

3. Principe de Castigliano (1875)

De tous les états d'équilibre virtuels du corps obtenus par variation des contraintes, il n'apparaît dans la réalité que l'état pour lequel l'énergie complémentaire du corps élastique R prend une valeur minimale :

$$\delta R=\delta\Pi\,(X_x,\,Y_y,\,\ldots)-\int_F(u_x\delta\overline{X}_\nu+u_y\delta\overline{Y}_\nu+u_z\delta\overline{Z}_\nu)\,dF=0, \qquad (11.15)$$

où

$$\delta\Pi\,(X_x,\,Y_y,\,\ldots)=\int_V(\varepsilon_x'\delta X_x+\varepsilon_y'\delta Y_y+\varepsilon_z'\delta Z_z+$$
$$+\varepsilon_{xy}'\delta X_y+\varepsilon_{xz}'\delta X_z+\varepsilon_{yz}'\delta Y_z)\,dV,$$

ε_x', ε_y', . . ., ε_{yz}' étant les composantes du tenseur des déformations engendrées par les déplacements arbitraires u_x', u_y', u_z' des points du corps, y compris par les déplacements réels u_x, u_y, u_z, $\overline{X}_\nu$, $\overline{Y}_\nu$; $\overline{Z}_\nu$ étant le nouveau système de forces de surface extérieures quand

$$\delta\overline{X}_\nu=\alpha_{\nu_1}\delta X_x+\alpha_{\nu_2}\delta X_y+\alpha_{\nu_3}\delta X_z,\ \text{etc.}$$

Si les forces de surface extérieures ne varient pas avec la modification de l'état de contrainte, c'est-à-dire si

$$\delta\overline{X}_\nu=\delta\overline{Y}_\nu=\delta\overline{Z}_\nu=0,$$

on obtient alors de la formule (11.15) le principe du travail minimal de déformation (principe de Castigliano) :

$$\delta\Pi=0. \qquad (11.16)$$

*) La formule est donnée pour le problème à une dimension $y=f(x)$. Pour un problème à deux dimensions $w=w(x,\,y)$ l'équation d'Euler-Lagrange a l'aspect :

$$\frac{\partial F}{\partial w}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial w_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial w_y}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{xx}}\right)+$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{xy}}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{yy}}\right)-\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{xxx}}\right)-\ldots=0.$$

4. Principe de Hamilton [66]

Un corps élastique en mouvement effectue des déplacements qui communiquent à son énergie $E - K$, dans l'intervalle de temps donné, la valeur stationnaire

$$\delta \int_{\tau_0}^{\tau} (E-K)\, d\tau = 0, \tag{11.17}$$

dont l'énergie cinétique est

$$K = \int_V \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial \tau} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial \tau} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial \tau} \right)^2 \right] dV.$$

De l'équation (11.17) il ressort que

$$\int_{\tau_0}^{\tau} (K-E)\, d\tau = \text{valeur stationnaire}. \tag{11.18}$$

5. Principe combiné de Reissner [67]

La fonctionnelle spéciale I d'un système arbitraire de déplacements, satisfaisant aux conditions aux limites cinématiques et à un système arbitraire de contraintes qui vérifie les équations d'équilibre au sein du corps et à sa surface, acquiert la valeur minimale pour le système de déplacements et de contraintes pratiquement réalisés dans le corps élastique

$$\delta I = 0, \tag{11.19}$$

où la fonctionnelle mixte

$$I = \int_V \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \sigma_{ij} - \Pi_1 \right] dV - \int_F \overline{T}_{n_i} u_i \, dF,$$

Π_1 étant le travail de déformation spécifique dans l'état réel d'équilibre.

L'équation aux variations (11.19) est équivalente à six relations entre les composantes du tenseur des contraintes et du tenseur des déformations

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial \Pi_1}{\partial \sigma_{ij}^*} \tag{11.20}$$

($\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}$ pour $i = j$, $\sigma_{ij}^* = 2\sigma_{ij}$ pour $i \neq j$); à trois équations d'équilibre

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + X_j = 0 \tag{11.21}$$

et aux conditions aux limites

$$T_{\nu_i} = \overline{T}_{\nu_i} \quad \text{sur} \quad F_T,$$

$$u_i = \overline{u}_i \quad \text{sur} \quad F_u, \tag{11.22}$$

où F_T est la partie de la surface pour laquelle sont données les forces $\overline{T}_{\nu i}$,

F_u la surface restante pour laquelle sont donnés les déplacements $\overline{u}_i$.

Dans le principe étudié le tenseur des contraintes et le tenseur des déplacements varient indépendamment l'un de l'autre.

IV. METHODES VARIATIONNELLES

1. Méthode de Ritz (1908)-Timochenko (1910) [68, 69]

La solution approchée w_n de l'équation différentielle du problème

$$L\,(x,\ y,\ w,\ w_x,\ w_y,\ w_{xx},\ w_{yy},\ w_{xy},\ \ldots) = 0\ ^{*)} \tag{11.23}$$

est donnée sous la forme

$$w_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i (x,\ y), \tag{11.24}$$

où $L\,(\ldots)$ est l'opérateur différentiel,

a_i sont les paramètres constants cherchés,

$\varphi\,(x,y)$ les fonctions données satisfaisant aux conditions aux limites cinématiques.

On calcule les valeurs de l'énergie potentielle ou complémentaire, tandis que les coefficients a_i de l'état d'équilibre réel se déterminent des conditions de la minimisation

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial R}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n). \tag{11.25}$$

Cette méthode fournit l'*approximation* à la valeur réelle de la grandeur w par le haut.

2. Méthode de Boubnov (1913)-Galerkine (1915) [70, 71]

La solution approchée y_n de l'équation différentielle du problème

$$L\,(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots) = 0\ ^{**)} \tag{11.26}$$

---

*) L'équation est écrite pour un problème à deux dimensions.

**) L'équation est écrite pour un problème à une seule dimension.

est donnée sous la forme

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x), \tag{11.27}$$

où a_i sont les paramètres constants cherchés,
$\varphi_i(x)$ les fonctions linéairement indépendantes de l'argument x, satisfaisant aux conditions aux limites statiques et cinématiques.

On écrit les conditions de l'extrémum d'une certaine fonctionnelle qui acquiert la valeur extrémale totale avec la satisfaction de l'équation différentielle donnée (11.26) qui a l'aspect:

$$\int_{x_1}^{x_2} L(x, y_n, y_n', y_n'', \ldots) \varphi_i(x)\, dx = 0 \tag{11.28}$$

pour $i = 1, 2, \ldots, n$.

Sous forme développée ces conditions fournissent n équations algébriques:

$$a_1 \int_{x_1}^{x_2} L(\varphi_1) \cdot \varphi_1\, dx + a_2 \int_{x_1}^{x_2} L(\varphi_2) \cdot \varphi_1\, dx + \ldots + a_n \int_{x_1}^{x_2} L(\varphi_n) \cdot \varphi_1\, dx = 0,$$

$$a_1 \int_{x_1}^{x_2} L(\varphi_1) \cdot \varphi_2\, dx + a_2 \int_{x_1}^{x_2} L(\varphi_2) \cdot \varphi_2\, dx + \ldots + a_n \int_{x_1}^{x_2} L(\varphi_n) \cdot \varphi_2\, dx = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_1 \int_{x_1}^{x_2} L(\varphi_1) \cdot \varphi_n\, dx + a_2 \int_{x_1}^{x_2} L(\varphi_2) \cdot \varphi_n\, dx + \ldots + a_n \int_{x_1}^{x_2} L(\varphi_n) \cdot \varphi_n\, dx = 0, \tag{11.29}$$

où

$$L(\varphi_i) = L(x, \varphi_i, \varphi_i', \varphi_i'', \ldots).$$

Pour toute équation d'équilibre (11.26), la fonctionnelle mentionnée est l'expression de l'énergie potentielle totale E, quant aux conditions concernant son extrémum elles constituent les conditions d'équilibre, écrites sous forme d'égalité à zéro du travail de toutes les forces sur les déplacements donnés $\varphi_i(x)$, qui conduisent aux équations (11.29).

Dans la méthode examinée au système (au corps) sont imposés certains liens qui autorisent ce dernier à se déformer suivant les formes $\varphi_i(x)$, ce qui équivaut à sa réduction au système à n degrés de liberté.

3. Méthode de Vlassov (1946)-Kantorovitch (1942) [72, 73]

La solution approchée w_n de l'équation différentielle du problème

$$L(x, y, w, w_x, w_y, w_{xx}, w_{yx}, w_{yy}, \ldots) = 0$$

est donnée sous la forme

$$w_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i(y) \cdot X_i(x), \tag{11.30}$$

où $X_i(x)$ sont les fonctions linéairement indépendantes de l'argument x données, appartenant au système total qui satisfait aux conditions aux limites cinématiques avec $x = x_1$ et $x = x_2$ et qu'on appelle fonctions de distribution transversale de la grandeur w;

$Y_i(y)$ les coefficients de développement (11.30) cherchés, qu'on appelle valeurs longitudinales généralisées de la grandeur w.

Pour déterminer des coefficients $Y_i(y)$, on écrit les conditions de l'extrémum d'une certaine fonctionnelle qui prend la valeur extrémale totale lorsque est satisfaite l'équation différentielle donnée

$$\int_{x_1}^{x_2} L(x, y, w_n, w_{ny}, \ldots) X_i(x)\, dx = 0, \tag{11.31}$$

avec $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Sous forme développée ces conditions aboutissent à n équations différentielles linéaires aux coefficients constants d'où se déterminent les grandeurs $Y_i(y)$.

Ainsi donc, le problème de la théorie de l'élasticité à deux dimensions est réduit au problème à une dimension.

Dans la méthode étudiée le système (le corps) élastique se ramène à un système à n degrés de liberté dans la direction transversale et à un nombre infini de degrés dans la direction longitudinale (y).

En 1964 Vlassov [74] a proposé une généralisation (une double approximation) de la méthode variationnelle de Vlassov-Kantorovitch, dans laquelle la solution est définie sous la forme

$$w_n = \sum_{i=1}^{n} [\varphi_i(y)\, \Psi_i(x) + \psi_i(x)\, \Phi_i(y)], \tag{11.30'}$$

où $\psi_i(x)$ sont les fonctions données de l'argument x,
$\varphi_i(y)$ idem de l'argument y,
$\Psi_i(x)$ et $\Phi_i(y)$ les fonctions cherchées.

4. Méthode de Trefftz (1933) [75]

La solution approchée de l'équation différentielle du problème

$$L(x, y, w, w_x, w_y, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}, \ldots) = 0$$

dans le domaine D pour des conditions aux limites

$$V(w) = \varphi \quad \text{à la limite } \Gamma \tag{11.32}$$

est donnée sous la forme

$$w_n = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i(x, y), \tag{11.33}$$

où a_i sont les paramètres constants cherchés,

w_i les fonctions linéairement indépendantes données appartenant au système total qui vérifie de façon exacte l'équation donnée et de façon approchée les conditions aux limites (11.32).

En reportant w_n dans l'équation (11.32), on obtient une transformation approchée au zéro identique de l'expression

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} a_i w_i\right) - \varphi.$$

En utilisant la propriété du zéro identique qui est d'être orthogonal à toute fonction, y compris aux fonctions w_i, on obtient

$$\int_{\Gamma} \left[V\left(\sum_{i=1}^{n} a_i w_i\right) - \varphi\right] w_i \, ds = 0, \tag{11.34}$$

avec $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

L'équation (11.34) fournit un système d'équations algébriques par rapport aux coefficients a_i qui s'avère linéaire si l'opérateur V est linéaire.

Cette méthode permet d'obtenir l'*approximation* par le bas de la grandeur réelle de w.

Problèmes

11.1. Voir article [76].

Déterminer les contraintes dans une plaque rectangulaire sollicitée à la traction par des forces se distribuant suivant la loi parabolique (fig. 93).

Les conditions aux limites prennent la forme:

pour $x = \pm a$:

$$X_x = s\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right), \quad Y_x = 0; \tag{a}$$

pour $y = \pm b$: $X_y = Y_y = 0$.

L'énergie de déformation pour un état plan de contrainte d'une plaque dont l'épaisseur est égale à l'unité est:

$$\Pi = \frac{1}{2E} \int\int [X_x^2 + Y_y^2 - 2\sigma X_x Y_y + 2(1+\sigma) X_y^2] \, dx \, dy. \tag{b}$$

Puisque pour un problème plan du domaine simplement connexe, la distribution des contraintes est indépendante des constantes élastiques, on peut simplifier les calculs ultérieurs en posant $\sigma = 0$.

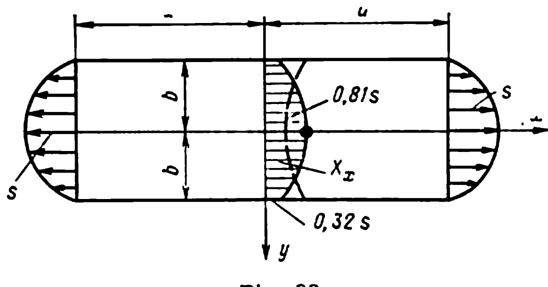


Fig. 93

En introduisant la fonction des contraintes φ et en reportant dans la formule (b) les égalités:

$$X_x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \quad Y_y = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \quad X_y = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y},$$

il vient

$$\Pi = \frac{1}{2E}\int\int\left[\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]dx\,dy. \qquad (c)$$

En appliquant à la formule (c) le principe de Castigliano (11.16), on obtient l'équation biharmonique connue du problème plan.

Cherchons la solution du problème par la méthode de Ritz-Timochenko.

Donnons à la fonction des contraintes l'aspect d'une série:

$$\varphi = \varphi_0(x, y) + a_1\varphi_1(x, y) + a_2\varphi_2(x, y) + a_3\varphi_3(x, y) + \ldots, \qquad (d)$$

satisfaisant aux conditions aux limites (a).

On y parvient en posant

$$\varphi = \frac{1}{2}sy^2\left(1 - \frac{1}{6}\frac{y^2}{b^2}\right) + (x^2 - a^2)^2(y^2 - b^2)^2(a_1 + a_2x^2 + a_3y^2 + \ldots). \qquad (e)$$

Dans la solution (e) le premier terme vérifie les conditions aux limites données (a), tandis que les termes suivants vérifient les conditions homogènes ($X_x = Y_y = Y_x = X_y = 0$) et, en vertu de la symétrie de la distribution des contraintes par rapport aux axes x et y, on ne conserve que les exposants paires des variables.

Les valeurs des constantes a_1, a_2, a_3, ... se déterminent d'après les conditions (11.25)

$$\frac{\partial\Pi}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial\Pi}{\partial a^2} = 0, \quad \frac{\partial\Pi}{\partial a_3} = 0, \ \ldots \qquad (f)$$

En se limitant dans l'expression (e) au seul terme a_1, il vient

$$\varphi \doteq \varphi_0 + a_1\varphi_1 = \frac{1}{2} sy^2 \left(1 - \frac{1}{6}\frac{y^2}{b^2}\right) + a_1 (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2.$$

La première des équations (f) prend l'aspect

$$a_1 \left(\frac{64}{7} + \frac{256}{49}\frac{b^2}{a^2} + \frac{64}{7}\frac{b^4}{a^4}\right) = \frac{s}{a^4 b^2},$$

d'où si la plaque est carrée ($a = b$)

$$a_1 = 0{,}04253 \frac{s}{a^6}$$

tandis que les composantes du tenseur des contraintes se déterminent à l'aide des formules

$$X_x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = s\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) - 0{,}1702 s \left(1 - \frac{3y^2}{a^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2,$$

$$Y_y = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -0{,}1702 s \left(1 - \frac{3x^2}{a^2}\right)\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)^2,$$

$$X_y = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} = -0{,}6805 s \frac{xy}{a^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right).$$

La figure 93 donne l'épure de X_x quand $x = 0$; on a indiqué en pointillé la distribution des contraintes X_x, pour $x = 0$, quand

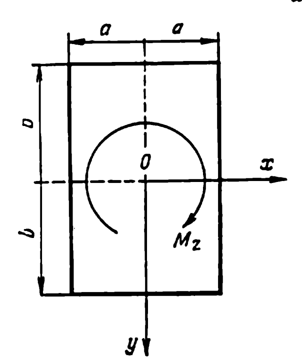


Fig. 94

$a = 2b$. A mesure que le rapport a/b croît, la distribution des contraintes dans la section $x = 0$ se rapproche d'une distribution uniforme, ce qui est en accord avec le principe de Saint-Venant.

Pour obtenir une distribution des contraintes plus précise, il faut prendre dans la série (e) trois termes, voir [76].

▶ Etudier la plaque rectangulaire de la figure 93 aux extrémités de laquelle $x = \pm a$ sont appliqués des efforts $X_x = sy^3$, voir [76], solution de J. Goudière (1931).

11.2. Voir [77].

Etudier en recourant à la méthode de Ritz-Timochenko la torsion pure d'une tige de section rectangulaire aux côtés $2a$ et $2b$ sollicitée par un moment de torsion M_z (fig. 94).

La limite de la section est définie par les équations:

$$x = \pm a, \quad y = \pm b.$$

En appliquant le principe de Castigliano sur l'énergie complémentaire du corps élastique R [voir formule (11.15)], autrement dit en tenant compte des variations du moment de torsion M_z aux extrémités, on obtient

$$\delta R = \frac{1}{2G}\,\delta \int_F \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2\right] dF - 2\alpha\delta \int_F \Phi\, dF = 0,$$

soit

$$\delta \int_F \left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2\right] - 2G\alpha\Phi\right\} dF = 0, \qquad \text{(a)}$$

où

$$\delta \Pi = \frac{1}{2G}\,\delta \int_F (X_z^2 + Y_z^2)\, dF = \frac{1}{2G}\,\delta \int_F \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2\right] dF$$

est la variation de l'énergie potentielle;

$X_z = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $Y_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ les contraintes tangentielles aux extrémités de la tige;

$\delta M_z = -2\delta \int_F (Y_z x - X_z y)\, dF = -2\delta \int_F \Phi\, dF$ *) la variation du moment de torsion;

α l'angle de torsion de la tige par unité de longueur.

La valeur vraie de la fonction des tensions Φ réduit à zéro la variation de l'intégrale

$$R = \int_F \left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2\right] - 2G\alpha\right\} dF. \qquad \text{(b)}$$

Pour obtenir la solution approchée du problème substituons au problème de calcul des variations (b) le problème de la recherche de l'extrémum de la fonction donnée

$$\Phi = a_0\Phi_0 + a_1\Phi_1 + a_2\Phi_2 + \ldots,$$

---

*) En intégrant par parties, on tient compte de ce qu'à la limite de la section $x = \pm a$ et $y = \pm b$ $\Phi = 0$.

ou

$$\Phi=(x^2-a^2)(y^2-b^2)\sum_m\sum_n a_{mn}x^m y^n, \qquad (c)$$

où, en vertu de la symétrie, m et n sont pairs.

En première approximation pour une tige carrée $a = b$, on admet que

$$\Phi = a_0 (x^2 - a^2)(y^2 - a^2). \qquad (d)$$

En portant cette expression dans la formule (b), on trouve sur la base des conditions de l'extrémum (11.25)

$$\frac{dR}{da_0}=0,$$

et, par suite,

$$a_0=\frac{5}{8}\frac{G\alpha}{a^2}$$

En vertu de la formule (a) le moment de torsion

$$M_z=2\int\int\Phi\,dx\,dy=\frac{20}{9}G\alpha a^4=0{,}1388\,(2a)^4\,G\alpha.$$

En confrontant cette valeur à la valeur précise (voir problème 7.4) on constate que l'erreur en l'appréciation de la valeur du moment de torsion est de près de 1,33 %.

En conservant dans la série (c) les trois premiers termes, il vient

$$\Phi = (x^2 - a^2)(y^2 - a^2)[a_0 + a_1 (x^2 + y^2)]. \qquad (e)$$

En reportant cette expression dans la formule (b), on obtient des conditions de l'extrémum (11.25)

$$a_0=\frac{5}{8}\frac{259}{277}\frac{G\alpha}{a^2}, \quad a_1=\frac{5}{8}\frac{3}{2}\frac{35}{277}\frac{G\alpha}{a^4}.$$

Le moment de torsion

$$M_z=\frac{20}{9}\left(\frac{259}{277}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{2}\frac{35}{277}\right)G\alpha a^4=0{,}1404\,(2a)^4\,G\alpha,$$

ce qui est de 0,15 % inférieur à la solution exacte. En reportant la fonction (d) dans l'expression des contraintes tangentielles (a), on trouve que l'erreur, en cas de contrainte maximale, est de près de 4 % ; pour avoir la meilleure approximation, il faut conserver dans la série (c) un grand nombre de termes.

▶ Résoudre le problème par la méthode de Trefftz.

Conseil.

1) Prendre en qualité d'approximation initiale la solution du problème (7.7)

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=-2\alpha G$$

sous la forme

$$\Phi_0 = -2\alpha G \frac{x^2+y^2}{2}.$$

2) La valeur de la fonction Φ doit être définie sous la forme

$$\Phi = \Phi_0 - a_1\Phi_1,$$

où

$$\Phi_1 = -\frac{2\alpha G}{4} \frac{x^4-6x^2y^2+y^4}{a^2+b^2}.$$

▶ **Résoudre le problème par la méthode de Boubnov-Galerkine.**

Conseil

En qualité de première approximation prendre la solution de l'équation (7.7) sous la forme

$$\Phi = a_0 (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)|_{a=b} = a_0 (x^2 - a^2)(y^2 - a^2).$$

11.3. Voir article [78].

Déterminer l'état de contrainte d'un parallélépipède droit aux arêtes d, k, h (fig. 95) à l'intérieur duquel la distribution de la température est définie par la loi

$$t = t_1 \sin\frac{\pi x}{d} \sin\frac{\pi y}{k} \sin\frac{\pi z}{h}, \tag{a}$$

selon laquelle on a au centre $t_{max} = t_1$ et à la surface $t = 0$. Le matériau du parallélépipède est de l'acier pour lequel $E = 2\cdot10^6$ kg/cm², $\alpha = 125\cdot10^{-7}$ ($E\alpha = 25$).

Désignons le rapport entre les arêtes du parallélépipède par $\lambda = \frac{h}{k}$ et $\delta = \frac{h}{d}$. Le tenseur des contraintes sera construit à l'aide des fonctions de contraintes maxweliennes χ_i (voir problème 1.6),

$$\chi_1 = \sum_m \sum_n \sum_p A_{mnp} P_m(x) P_n(y) P_p(z),$$

$$\chi_2 = \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} P_m(x) P_n(y) P_p(z),$$

$$\chi_3 = \sum_m \sum_n \sum_p C_{mnp} P_m(x) P_n(y) P_p(z), \tag{b}$$

où $P_m(x)$, $P_n(y)$, $P_p(z)$ sont les cosinus binômes déterminés d'après les formules:

$$P_m(x) = \cos\frac{m\pi x}{d} - \cos\frac{(m+2)\pi x}{d},$$

$$P_n(y) = \cos\frac{n\pi y}{k} - \cos\frac{(n+2)\pi y}{k},$$

$$P_p(z) = \cos\frac{p\pi z}{h} - \cos\frac{(p+2)\pi z}{h}, \quad m, n, p = 0, 1, 2, \ldots \tag{c}$$

A_{mnp}, B_{mnp}, C_{mnp} les coefficients à déterminer.

Les composantes du tenseur des contraintes s'expriment à l'aide des formules:

$$X_x = \frac{\partial^2\chi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\chi_3}{\partial z^2}, \qquad X_y = \frac{\partial^2\chi_1}{\partial x\,\partial y},$$

$$Y_y = \frac{\partial^2\chi_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\chi_1}{\partial x^2}, \qquad Y_z = -\frac{\partial^2\chi_2}{\partial y\,\partial z},$$

$$Z_z = \frac{\partial^2\chi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\chi_2}{\partial y^2}, \qquad Z_x = -\frac{\partial^2\chi_3}{\partial z\,\partial x},$$

ou, compte tenu de l'expression (b), il vient

$$X_x = \sum_m \sum_n \sum_p (A_{mnp}P_mP''_nP_p + C_{mnp}P_mP_nP''_p),$$

$$Y_y = \sum_m \sum_n \sum_p (B_{mnp}P_mP_nP''_p + A_{mnp}P''_mP_nP_p),$$

$$Z_z = \sum_m \sum_n \sum_p (C_{mnp}P''_mP_nP_p + B_{mnp}P_mP''_nP_p),$$

$$X_y = -\sum_m \sum_n \sum_p A_{mnp}P'_mP'_nP_p,$$

$$Y_z = -\sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp}P_mP'_nP'_p,$$

$$Z_x = -\sum_m \sum_n \sum_p C_{mnp}P'_mP_nP'_p. \tag{d}$$

Dans les formules (d), pour plus de concision, on a éliminé les arguments x, y, z dans les désignations des fonctions P.

Les fonctions (b) adoptées, compte tenu de (c), toutes les faces du parallélépipède sont exemptes de contraintes grâce aux propriétés aux limites des cosinus binômes:

$$P_m(0) = P_m(d) = P'_m(0) = P'_m(d), \text{ etc.}$$

Le problème se résout en première approximation pour $m = n = p = 0$ quand les fonctions χ_i ont l'aspect:

$$\chi_1 = AP_0(x)\,P_0(y)\,P_0(z), \quad \chi_2 = BP_0(x)\,P_0(y)\,P_0(z),$$
$$\chi_3 = CP_0(x)\,P_0(y)\,P_0(z).$$

Pour la résolution on utilise le principe de Castigliano sous forme de principe du travail de déformation minimum (11.16), car les forces de surface X_ν, Y_ν, Z_ν sont nulles:

$$\delta\Pi = \int_V (\delta X_x\varepsilon'_x + \delta Y_y\varepsilon'_y + \delta Z_z\varepsilon'_z + \delta X_y\varepsilon'_{xy} + \delta Y_z\varepsilon'_{yz} + \delta Z_x\varepsilon'_{zx})\,dV = 0, \tag{e}$$

où $\delta X_x, \ldots, \delta Z_x$ sont les variations des composantes du tenseur cherché vérifiant les équations d'équilibre;

$\varepsilon'_x, \ldots, \varepsilon'_{zx}$ les composantes du tenseur des déformations engendrées par les déplacements u'_x, u'_y, u'_z arbitrairement fixés et qui, dans le problème, sont pris pour des déplacements réels u_x, u_y, u_z:

$$\varepsilon'_x = \varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[X_x - \sigma\left(Y_y + Z_z\right)\right] + \alpha t, \quad \varepsilon'_{xy} = \varepsilon_{xy} = \frac{2(1+\sigma)}{E} X_y, \tag{f}$$

les déformations ε'_y, ε'_z, ε'_{yz} et ε'_{zx} étant obtenues des formules (f) par permutation circulaire des lettres x, y, z.

En reportant les valeurs de (f) dans l'équation (e), il vient

$$\delta\Pi = \delta \frac{1}{2E} \int_V \left[X_x^2 + Y_y^2 + Z_z^2 - 2\sigma\left(X_x Y_y + Y_y Z_z + Z_z X_x\right) + \right.$$

$$\left. + 2(1+\sigma)\left(X_y^2 + Y_z^2 + Z_x^2\right) + 2E\alpha t\left(X_x + Y_y + Z_z\right)\right] dV = 0.$$

En introduisant dans cette dernière expression la valeur t tirée des formules (a) et la valeur des composantes du tenseur des contraintes (d) après avoir effectué l'intégration, on obtient Π comme fonction quadratique des coefficients A_{mnp}, B_{mnp}, C_{mnp}. Les conditions de l'extrémum de la fonction Π auront l'aspect:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_{mnp}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial B_{mnp}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial C_{mnp}} = 0 \quad \text{pour } m, n, p = 0, 1, 2, \ldots \tag{g}$$

c'est-à-dire la forme de système d'équations linéaires servant à la détermination des coefficients A_{mnp}, B_{mnp}, C_{mnp}.

Les équations (g) pour le cas où $m = n = p = 0$ seront:

$$(3 + 3\lambda^4 + 2\lambda^2) A + (\lambda^2\delta^2 - 3\sigma - \sigma\delta^2 - \sigma\lambda^2) B +$$

$$+ (\delta^2 - \sigma\lambda^2 - \sigma\lambda^2\delta^2 - 3\sigma\lambda^4) C = \frac{25 \cdot 8^3 (1+\lambda^2)}{2 \cdot 3^4 \pi^5} k^2 \lambda^2 t_1,$$

$$(\lambda^2\delta^2 - 3\sigma - \sigma\delta^2 - \sigma\lambda^2) A + (3 + 3\delta^4 + 2\delta^2) B +$$

$$+ (\lambda^2 - \sigma\delta^2 - 3\sigma\delta^4 - \sigma\lambda^2\delta^2) C = \frac{25 \cdot 8^3 (1+\delta^2)}{2 \cdot 3^4 \pi^5} d^2 \delta^2 t_1,$$

$$(\delta^2 - \sigma\lambda^2 - \sigma\lambda^2\delta^2 - 3\sigma\lambda^4) A + (\lambda^2 - \sigma\delta^2 - 3\sigma\delta^4 - \sigma\lambda^2\delta^2) B +$$

$$+ (3\lambda^4 + 3\delta^4 + 2\lambda^2\delta^2) C = \frac{25 \cdot 8^3 (d^2 + k^2)}{2 \cdot 3^4 \pi^5} \lambda^2 \delta^2 t_1.$$

Pour le cas où $d = k$ et, partant, pour $\delta = \lambda$, il vient

$$A = B = \frac{25 \cdot 8^3 h^2 t_1}{2 \cdot 3^4 \pi^5} \, \frac{3 + 4\lambda^2 (1+\sigma) + \sigma}{16\lambda^4 (1-\sigma^2) + 8\lambda^2 (1-\sigma) - \sigma (1+\sigma) + 11},$$

$$C = \frac{25 \cdot 8^3 h^2 t_1}{2 \cdot 3^4 \pi^5} \, \frac{16\lambda^4 (1+\sigma) + 4\lambda^2 (3\sigma - 2\sigma^2 + 1) + 8 (1-\sigma)}{4\lambda^2 \left[16\lambda^4 (1-\sigma^2) + 8\lambda^2 (1-\sigma) - \sigma (10+\sigma) + 11\right]}.$$

Les contraintes se déterminent d'après les formules (d). Par exemple

$$Z_z = \frac{4\pi^2}{d^2} A \left[\cos\frac{2\pi x}{d}\left(1-\cos\frac{2\pi y}{k}\right)\left(1-\cos\frac{2\pi z}{h}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(1-\cos\frac{2\pi x}{d}\right)\cos\frac{2\pi y}{k}\left(1-\cos\frac{2\pi z}{h}\right)\right].$$

Sur la figure 95 est représentée la surface de distribution de ces contraintes suivant la section médiane $z = h/2$ au cas d'un cube

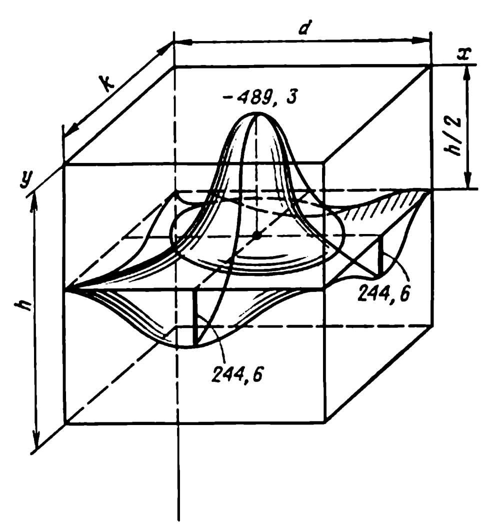


Fig. 95

($\lambda = \delta = 1$) quand $t_1 = 20°$, $\sigma = 1/3$. La contrainte de compression maximale au centre du cube $\left(\frac{x}{d} = \frac{y}{k} = \frac{z}{h} = \frac{1}{2}\right)$ sera:

$$Z_z = 10 \cdot 195 \cdot 20 \frac{3+4(1+1/3)+1/3}{16(1-1/9)+8(1-1/3)-1/3(10+1/3)+11} \times$$
$$\times [(-1)\,2{,}2+2(-1)\,2] = 489{,}3 \ \text{kg/cm}^2.$$

BIBLIOGRAPHIE

1. *Крутков Ю.* Тензор напряжений и общие решения в статике теории упругости. Изд-во АН СССР, 1949 (en russe).
2. *Wlassow W.* Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik, Akademic Verlag, Berlin, 1958.
3. *Винокуров Л.* Прямые методы решения пространственных и контактных задач для массивов и фундаментов. Изд. ХГУ, Харьков, 1956 (en russe).
4. *Love A.* A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 4th ed., Cambridge Univ. Press, 1927.
5. *Jahnke E., Emde F.* Tables of Functions with Formulae and Curves, 4th ed., Dover Publ., New York, 1945 (German and English).
6. *Neuber G.* Beiträge für den achssymetrischen Spannungszustand, Diss., München, 1932, see also [6].
7. *Goursat E.* Cours d'analyse mathématique, 5e éd., t. 3, p. 1, Gauthier-Villars, Paris, 1956.
8. *Tallqvist H.* Sechsstellige Tafeln der 32 ersten Kugelfunktionen P_n (cos θ), Helsingfors, 1938.
9. *Tricomi F.* Lezioni sulle equazioni a derivate parziali., Turin, 1954.
10. *Rekach V.* Problemas de la Teoria de la Elasticidad, Editorial Mir, 1978.
11. *Courant R., Hilbert D.* Methoden der mathematischen Physik, 2 verb. Aufl., Bd I, II, Springer Verlag, Berlin, 1931.
12. *Trefftz E.* Mathematische Elastizitatstheorie, in Handbuch der Physik, Bd. VI, Mechanik der elastischen Körper, Springer Verlag, Berlin, 1928, S. 92.
13. *Галеркин Б.* Общее решение уравнений теории упругости для изотопного тела. ДАН СССР, сер. А, 1930 (en russe).
14. *Галеркин Б.* О функциях напряжений. ДАН СССР, сер. А, 1931 (en russe).
15. *Гродский Г.* Интегрирование уравнений равновесия упругого тела вращения при осесимметричном относительно оси распределении объемных и поверхностных сил. Изв. АН СССР, сер. математики и естественных наук, № 10, 1934 (en russe).
16. *Neuber G.* Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie, Zeitsehr. für angew. Math. und Mech., 14 N 4, 1934.
17. *Neuber G.* Kerbspannungslehre. Grundlagen für genaue Spannungsrechnung, Springer Verlag, Berlin, 1937.
18. *Галин Л.* Трехмерные контактные задачи по теории упругости для пуансонов круглого сечения. Прикл. мат. и мех, 10 (4), 425—448 (946) (en russe).
19. *Myndlin R.* Force at a Point in the Interior of a Semi-infinite Solid Physics, 7 (5), 195, 1936 ; Proc. First. Midwestern Conf. Solid Mech., Univ. of Illinois, Urbana 1953, p. 111.

20. *Kolosoff G.* Sur une application des formules de M. Schwarz, de M. Villat et de M. Dini au problème plan de l'élasticité, Comptes Rendus, Paris, t. 193, 1931, p. 389.
21. *Muskhelishvili N.* Some Basic Problems on the Mathematical Theory of Elasticity, P. Neordhoff Ltd., Gröningen, 1953.
22. *Папкович П.* Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы. ДАН СССР, Новая серия, т. XXVII, вып. № 4, 1940 (en russe).
23. *Fadle I.* Die Selbstspannungs Eigenwertfunktionen der quadratischen Scheibe, Ing. Arch., Bd. XI, N 4, 1940.
24. *Китовер К.* Об использовании специальных систем бигармонических функций для решения некоторых задач теории упругости. Прикладная математика и механика, т. XVI, вып. 6, 1952 (en russe).
25. *Варвак П.* Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок. Изд-во АН УССР, ч. I, 1949; ч. II, 1954 (en russe).
26. *Жемочкин Б.* Теория упругости. М., Стройвоенмориздат, 1948 (en russe).
27. *Галеркин В.* Расчет трапецеидальных плотин. Труды Ленинградского ин-та инж. путей сообщения, №. XCIX, 1929 (en russe).
28. *Filonenko-Borodovich M.* Theory of Elasticity, Mir Publishers, Moscow, 1968.
29. *Ribière C.* Sur la flexion des pièces épaisses, Compt. rend. Acad. sci., Paris. Ser A, 126, 402-404 (1898) ; Sur la résistance des massifs épais, ibid., 126, 1190-1192 (1898).
30. *Filon Z. N.* On an Approximate Solution for the Bending of a Beam of Rectangular Cross-section Under Any System of Load, with Special Reference to Points of Concentrated or Discontinuous Loading, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, 201 (334), 63-155 (1903).
31. *Власов В.* Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики. М., Стройиздат, 1975 (en russe).
32. *Романовский П.* Ряды Фурье. Теория поля, аналитические и специальные функции, преобразование Лапласа. М., Физматгиз, 1961 (en russe).
33. *Борисов Н.* Применение однородных краевых решений к расчету клина на абсолютно жестком основании. Изв. вузов, Строительство и архитектура, № 6, 1963 (en russe).
34. *Борисов Н.* Применение однородных краевых решений к расчету клина на упругом основании. Сб. « Структура и деформативность легких и некоторых специальных бетонов ». Труды Пензенского инженерно-строительного института, вып. 5, Пенза, 1970 (en russe).
35. *Gray A., Mathews G. B.* A Treatise on Bessel Functions and Their Applications to Physics, 2nd ed., Macmillan Co., London, 1931.
36. *Новожилов В.* Теория упругости. Л., Судпромгиз, 1958 (en russe).
37. *Melan E.* Ein Beitrag zur Torsion von Rotationskörpern, Technische Blätter, Prag, No 48, 417-419, No. 49/50, 427-429 (1920).
38. *Melan E., Parkus H.* Wärmespannungen infolge Stationärer Temperaturfelder, Springer Verlag, Wien, 1953.
39. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. М., « Высшая школа », 1967 (en russe).
40. *Boley B. A., Weiner J. H.* Theory of Thermal Stresses, Wiley, New York-London, 1960.
41. *Безухов Н.* Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М., « Высшая школа », 1961 (en russe).
42. *Коренев Б.* Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. М., Физматгиз, 1960 (en russe).
43. *Галин Л.* Контактные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1953 (en russe).
44. *Rayleigh J. W.* On Waves Propagated Along the Plane Surface of an Elastic Solid, Proc. London Math. Soc., 17, 4-11 (1887).
45. *Miller G. F., Pursey H.* On the Partition of Energy Between Elastic Waves in a Semi-Infinite Solid, Proc. Roy. Soc. London. Ser. A, 233 (1192), 55-69 (1955).

46. *Dalling H.-J.* Die Abschirmung von Erschütterungen durch Bodenschlitze, Bautechnik, No. 5, 151-158 ; No. 6, 193-204 (1970).
47. *Баркан Д.* Динамика оснований и фундаментов. Стройвоениздат, 1948 (en russe).
48. *Забылин М. Игольников В.* Исследование параметров упругих волн, распространяющихся в грунтах от промышленных источников. Изв. вузов, Строительство и архитектура, N° 11, 1971 (en russe).
49. *Love A. E. H.* Some Problems of Geodynamics, Cambridge Univ. Press, 1911. Reprint, Dover Publ., New York, 1967.
50. *Radok J. R. M.* On the Solution of Problems of Dynamic Plane Elasticity, Quart. Appl. Math., 14 (3), 289-298 (1956).
51. *Sneddon I. N., Berry D. S.* The Classical Theory of Elasticity in «Encyclopedia of Physics, Vol. VI, Elasticity and Plasticity (S. Flügge, ed.), Springer Verlag, Berlin, 1958, pp. 1-126.
52. *Sneddon I.* Fourier Transforms, McGraw-Hill Book Co., New York, 1951.
53. *Петрашень Г.* О рациональном методе решения задач динамической теории упругости в случае слоисто-изотропных областей с плоскопараллельными границами раздела. Записки ЛГУ, № 208, 1956 (en russe).
54. *Smirnow V., Sobolev I.* Sur une méthode nouvelle dans le problème plan des vibrations élastiques, Trudy Seismol. Inst., Akad. Nauk S.S.S.R. No. 20, 37 (1932).
55. *Smirnov V., Sobolev I.* Sur l'application de la méthode nouvelle à l'étude des vibrations élastiques dans l'espace à symétrie axiale. Trudy Seismol. Inst., Akad. Nauk S.S.S.R., No 29, 89 (1933).
56. *Еругин Н.* О функционально-инвариантных решениях. Ученые записки ЛГУ, № 15, 1948 (en russe).
57. *Синицын А.* Расчет конструкций на тепловой удар. Стройиздат, 1971 (en russe).
58. *Даниловская В.* Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева его границы. Прикладная математика и механика, т. XIV, вып. 3, 1950; см. т. XIV, вып. 3, 1952 (en russe).
59. *Chree C.* Long Rotating Circular Cylinders, Proc. Cambridge Rhil. Soc. 7, 285-305 (1892). *Chree C.* The Equations of an Isotropic Elastic Solid in Polar and Cylindrical Coordinates, Their Solution and Application, Trans. Cambridge Phil. Soc., 14, 250-369 (1889).
60. *Pochhammer L.* Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten Kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder, J. reine und angew. Math., 81, 324-336 (1876).
61. *Sneddon I.* The Stress Produced by a Pulse of Pressure Moving Allong the Surface of a Semi-infinite Solid, Rend. Circ. mat., Palermo, Ser. II, 1 (1), 57-62 (1952).
62. *Бородачев Н.* Колебания упругой полуплоскости. Труды Куйбышевского инженерно-строительного ин-та, вып. 5, 1958 (en russe).
63. *Лейбензон Л.* Вариационные методы решения задач теории упругости ГИТТЛ, 1943 ; Собрание трудов АН СССР, т. 1, 1951 (en russe).
64. *Постнов В.* Численные методы расчета судовых конструкций, гл. II, Судостроение, Л., 1977 (en russe).
65. *Амензаде Ю.* Теория упругости, гл. III, « Высшая школа », 1976 (en russe).
66. *Hamilton W.* On a General Method in Dynamics, Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1835.
67. *Reissner E.* On a variational Theorem in Elasticity J. Math. a Phys., v. 29, N 2, 1950 ; Райсснер Э. О некоторых вариационных теоремах теории упругости. В сб. Проблемы механики сплошной среды, АН СССР, 1961 (en russe).
68. *Ritz W.* Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematische Physik, J. Die reine u. angew. Math. B. 135, 1908; Gesammelte Werke. Gauthier-Villars, s. 192, Paris, 1911.

69. *Тимошенко С.* Об устойчивости упругих систем. Изв. Киевского ПИ, Киев, 1910 (en russe).
70. *Бубнов И.* Отзыв о сочинениях проф. Тимошенко. Труды Ин-та инженеров путей сообщения, в. 81, Спб., 1913 (en russe).
71. *Галеркин Б.* Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия стержней и пластинок. Ж. « Вестник инженеров », т. 1, № 19, 1915 (en russe).
72. *Власов В.* Строительная механика тонких упругих пластин. Ж.« Прикл. матем. и мех. », т. X, в. 1, 1946 (en russe).
73. *Канторович Л.* Использование идей метода акад. Б. Г. Галеркина в методе приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Ж. « Прикл. матем. и мех. », № 6, 1942 (en russe).
74. *Вайндинер А.* Двойная аппроксимация метода Власова-Канторовича. Вестник МГУ, № 2, 1967 (en russe).
75. *Trefftz E.* Zur Theorie der Stabilität des elastischen Gleichgewichts, Zeitschr. Angew. Math. u. Mech., 1933.
76. *Timoshenko S.* Phil. Mag. 47, 1095, 1924 ; *Тимошенко С. П.*, *Гудьер Дж.* Теория упругости. М., Наука, 1975.
77. *Тимошенко С. П.* Сб. Ин-та инженеров путей сообщения, Спб., 1913 ; Proc. London, Math. Soc., ser. 2, 20, 389, 1921.
78. *Филоненко-Бородич М.* Задача о равновесии упругого параллелепипеда при заданных нагрузках на его гранях. Ж. « Прикл. матем. и мех. », т. XV, вып. 2, 1951 ; Две задачи о равновесии упругого параллелепипеда. Ж. « Прикл. матем. и мех. », т. XV, вып. 5, 1951 (en russe).

TABLE DES MATIÈRES

À NOS LECTEURS

Les Editions Mir vous seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur le contenu de ce livre, sa traduction et présentation, ainsi que toute autre suggestion.

Ecrire à l'adresse: 1er Rijski péréoulok, 2, Moscou, I-278, U.R.S.S.

Imprimé en Union Soviétique